TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 09

Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: 06.05. vor der Übung

2. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(bedingte Wahrscheinlichkeiten, σ-Algebren, Wahrscheinlichkeitsmaße)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Frau A hat genau zwei Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwei Söhne hat, falls bereits bekannt ist, dass sie (mindestens) einen Sohn hat.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{I}$ eine nichtleere Indexmenge, und seien $\mathcal{F}_i,\ i \in \mathcal{I}$, σ-Algebren in einer Menge Ω.

a) Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ eine σ-Algebra in Ω ist.

b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier σ-Algebren (in der gleichen Menge Ω) im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitmaße auf einer abzählbaren Menge Ω. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{P}$ ist konvex.

(ii) Beschreiben Sie die *Extremalpunkte* von $\mathcal{P}$, und zeigen Sie, daß sich jedes $P \in \mathcal{P}$ als *Mischung* von Extremalpunkten darstellen läßt, d.h.

$$P = \sum_i \alpha_i P_i$$

mit $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, P_i extremal.

Dabei ist $Q \in \mathcal{P}$ Extremalpunkt, falls aus $\alpha Q_1 + (1-\alpha) Q_2 = Q$ für $\alpha \in (0,1)$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$ folgt, dass $Q = Q_1 = Q_2$ ist.

4. Aufgabe (6 Punkte)

(i) Es sei $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ eine abzählbar-unendliche Zerlegung von Ω und $\mathcal{F}$ die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{D}$ enthält (sie wird dann auch mit $\sigma(\mathcal{D})$ bezeichnet). Beweisen Sie, dass $\mathcal{F}$ überabzählbar unendlich viele Elemente enthält.

(ii) Folgern Sie aus (a), dass es keine σ-Algebra mit abzählbar unendlich vielen Elementen gibt.

Gesamtpunktzahl: 20