TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: 10.06. vor der Übung

7. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Erzeugende und charakteristische Funktionen, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei (X_k) eine Folge von identisch verteilten Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und N ebenfalls eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße, so dass $N, X_1, X_2, \ldots$ in ihrer Gesamtheit unabhängig sind und $EX_i < \infty$ sowie $EN < \infty$ gelte. Zeige

$$E \sum_{k=1}^{N} X_k = E(N)E(X_1) < \infty.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Wir betrachten den Verzweigungsprozess aus der Präsenzübung. Es sei N_n die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation und $N_0 = 1$.

(a) Berechne EN_n.

(b) Zeige: Falls die erwartete Anzahl an Nachkommen eines Individuums kleiner als 1 ist, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(N_n = 0) = 1,$$

d.h. die Population „stirbt aus“.

Hinweis zu (b): Chebyshev-Ungleichung.

3. Aufgabe (5 Punkte)

(a) Es sei X eine Zufallsgröße mit stetiger Dichte f. Zeige: Ist f eine gerade Funktion (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), so ist die charakteristische Funktion von X reellwertig.

(b) Es seien X und Y unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit charakteristischer Funktion φ. Zeige, dass $|\varphi|^2$ die charakteristische Funktion von $X-Y$ ist. (Die Verteilung von $X-Y$ heißt auch *symmetrisierte Verteilung von X*.)

(c) Es sei X eine Zufallsgröße mit $P(X \in \{an+b \mid n \in \mathbb{Z}\}) = 1$ (für passend gewähltes $a, b \in \mathbb{R}$) und charakteristischer Funktion φ. Zeige, dass es ein $t \neq 0$ mit $|\varphi(t)| = 1$ gibt.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Es seien (X_n) und (Y_n) Folgen von Zufallsgrößen sowie X und Y Zufallsgrößen derart, dass $X = P\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n$ und $Y = P\text{-}\lim_{n\to\infty} Y_n$. Zeige, dass dann auch $X + Y = P\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n + Y_n$ gilt.

Gesamtpunktzahl: 20