TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Dozent: Gärtner
Assistent: Drewitz

Abgabe: 17.06. vor der Übung

8. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie 1

(Konvergenzen, Gesetze der Großen Zahlen)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen und es sei

$$Y_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

(a) Bestimme die Verteilung von Y_n.

(b) Zeige unter Ausnutzung von (a), dass Y_n für $n \to \infty$ schwach gegen 0 konvergiert.

Hinweis: Bei (a) kann gewinnbringend verwendet werden, dass die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung durch $t \mapsto e^{-t^2/2}$ gegeben ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, X_1, X_2, \dots$ k-dimensionale Zufallsvektoren, d.h. $\mathbb{R}^k$-wertige Zufallsvariablen. Man sagt, dass die Folge (X_n) in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert und schreibt $X_n \xrightarrow{P} X$, falls für jedes $\epsilon > 0$

$$P(\|X_n - X\| > \epsilon) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt, wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichne.
Beweise folgende Aussagen.

(a) Es sei $c \in \mathbb{R}^k$ und sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ stetig im Punkte c. Gilt $X_n \xrightarrow{P} c$, so gilt auch $f(X_n) \xrightarrow{P} f(c)$.

(b) $(X_n^1, \ldots, X_n^k) \xrightarrow{P} (X^1, \ldots, X^k)$ gilt genau dann, wenn $X_n^i \xrightarrow{P} X^i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reellwertige Zufallsvariablen.

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass aus $X_n \xrightarrow{P} X$ schon $X_n \Rightarrow X$ folgt, d.h. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert Konvergenz in Verteilung. Zeige, dass falls X P-f.s. konstant ist, auch die Umkehrung gilt, d.h. $X_n \Rightarrow X$ impliziert $X_n \xrightarrow{P} X$.

(b) Zeige, dass aus $(X_n - X)^2 \xrightarrow{P} 0$ schon $X_n \xrightarrow{P} X$ folgt.

(c) Zeige, dass aus $X_n \longrightarrow X$ P-f.s. schon $n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \longrightarrow X$ P-f.s. folgt.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Zeige, dass die Folge zwar dem schwachen, aber nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} (X_i - EX_i)$$

zwar in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert, aber nicht fast sicher.

Gesamtpunktzahl: 20