Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

SoSe 2010
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Stand: 27. April 2010

Lineare Algebra I
2. Hausaufgabe

Abgabe: 05.05.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort (ausnahmsweise!) nicht begründen.

(i) Geben Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $\{1, 2\}$ an.

(ii) Geben Sie eine symmetrische und transitive Relation auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ an, die jedoch nicht reflexiv ist.

In der 2. und 3. Aufgabe bezeichne stets a^{-1} das zu $a \in G$ inverse Element der Gruppe.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $(G, \oplus)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Elemente aus G:

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$,

(ii) $(a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$,

(iii) $a \oplus b_1 = a \oplus b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$,

(iv) $a_1 \oplus b = a_2 \oplus b \Rightarrow a_1 = a_2$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $(G, \oplus)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$, $U \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $(U, \oplus)$ ist eine Untergruppe von $(G, \oplus)$.

(ii) Für $a, b \in U$ folgt $a \oplus b \in U$ und für $a \in U$ folgt $a^{-1} \in U$.

(iii) Für $a, b \in U$ folgt $a \oplus b^{-1} \in U$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Es bezeichne $S(X)$ die Menge der bijektiven Abbildungen von X nach X, d.h.

$$S(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ bijektiv}\}.$$

Untersuchen Sie, ob $S(X)$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe ist, also ob $(S(X), \circ)$ eine Gruppe ist.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Wir definieren die Relation $\sim_U$ auf G durch

$$a \sim_U b :\Leftrightarrow a * b^{-1} \in U.$$

Zeigen Sie, dass $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

Gesamtpunktzahl: 20