Technische Universität Berlin SoSe 2010
Institut für Mathematik http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 25. Mai 2010

Lineare Algebra I
6. Hausaufgabe

Abgabe: 02.06.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins, $A \in \mathrm{GL}_n(R)$, $U \in R^{n,m}$ und $V \in R^{m,n}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $A + UV \in \mathrm{GL}_n(R)$ genau dann, wenn $I_m + VA^{-1}U \in \mathrm{GL}_m(R)$.

(ii) Falls $I_m + VA^{-1}U \in \mathrm{GL}_m(R)$, so ist

$$(A + UV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_m + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Hinweis: HA 5-1.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie die Treppennormalform der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{3,4}, \quad B = \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & -i & -i \\ i & i & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

unter Angabe der verwendeten Elementarmatrizen. Bestimmen Sie die Pivotpositionen und den Rang von A und B. Untersuchen Sie weiter, welche Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse. (Vergessen Sie nicht, eine Probe zu machen.)

3. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^{n,1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(i) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(ba^T)$.

(ii) Sei nun $M(a,b) := ba^T - ab^T$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) $M(a,b) = -M(b,a)$ und $M(a,b)c + M(b,c)a + M(c,a)b = 0$,

(b) $M(\lambda a + \mu b, c) = \lambda M(a,c) + \mu M(b,c)$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(c) $\operatorname{Rang}(M(a,b)) = 0$ genau dann, wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$ und $\lambda a + \mu b = 0$ gibt.

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Seien die Bezeichnungen wie in der 4. Aufgabe. Zeigen Sie $\operatorname{Rang}(M(a,b)) \in \{0, 2\}$.

Gesamtpunktzahl: 20