Technische Universität Berlin SoSe 2010
Institut für Mathematik http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète Stand: 31. Mai 2010

Lineare Algebra I
7. Hausaufgabe

Abgabe: 09.06.2010 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $r \in \mathbb{Q}$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}, \quad b_r = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,1}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $Ax = b_r$ (in Abhängigkeit von r).

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien K ein Körper, $m, n, s \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n,m}$ und $B \in K^{n,s}$. Für $i = 1, \ldots, s$ bezeichne b_i die i-te Spalte von B.
Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $AX = B$ genau dann mindestens eine Lösung $X \in K^{m,s}$ hat, wenn

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}([A, b_1]) = \mathrm{Rang}([A, b_2]) = \ldots = \mathrm{Rang}([A, b_s]).$$

Unter welcher Bedingung ist diese Lösung eindeutig?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & p_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & q_n & p_n \end{bmatrix} \in K^{n,n}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in K^{n,1}$$

und $p_i, q_i \neq 0$ für alle i.
Geben Sie eine rekursive Formel zur Berechnung der Einträge von $x \in K^{n,1}$ an.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie dass folgende Lemma.

Lemma. *Seien A und B Mengen mit $|A| = |B| = k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau $k!$ bijektive Abbildungen von A nach B gibt.*

5. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wir erinnern an die Definition eines Zykels: Eine Permutation $\sigma \in S_n$, für die eine Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit r Elementen existiert, so dass

$$\sigma(i_k) = i_{k+1} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, r-1, \quad \sigma(i_r) = i_1, \quad \sigma(i) = i \text{ für } i \notin \{i_1, \ldots, i_r\},$$

nennen wir einen *Zykel* (genauer einen r-*Zykel*) und schreiben $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$.

(i) Zeigen Sie, dass $(i_1, \ldots, i_r) = (i_1, \ldots, i_s)(i_s, \ldots, i_r)$ für $1 < s < r$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass jeder r-Zykel ($r \geq 2$) als Produkt von $r-1$ Transpositionen geschrieben werden kann.

(ii) Bestimmen Sie die Inverse eines Zykels $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in S_n$.

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Für $\sigma \in S_n$ definieren wir $\sigma^k := \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ (die k-fache Komposition von σ mit sich selbst), wobei $\sigma^0 := \mathrm{id}_{S_n}$.

(i) Sei $\sigma \in S_n$ und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Beweisen Sie: Es existiert $k \geq 1$ mit $\sigma^k(i) = i$.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \ldots$.

(ii) Sei $\sigma \in S_n$ und $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir definieren das *Orbit* von i unter σ durch

$$O^\sigma(i) := \{i, \sigma(i), \sigma^2(i), \sigma^3(i), \ldots\} = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \exists\, k \geq 0 : j = \sigma^k(i)\}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$i \sim_\sigma j \Leftrightarrow j \in O^\sigma(i)$$

eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiert wird.

Bemerkung: Die Orbits liefern gerade die Zykel der Permutation.

Gesamtpunktzahl: 20