Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Liesen, O. Sète

SoSe 2010
http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS10/LinA1/
Stand: 7. Juli 2010

Lineare Algebra I
12. Hausaufgabe

Abgabe: keine

---

1. Aufgabe

Seien V, W zwei K-Vektorräume, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $f : V \to W$ ein Vektorraum-Homomorphismus. Zeigen Sie:

(i) f ist injektiv genau dann, wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ linear unabhängig sind.

(ii) f ist surjektiv genau dann, wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(iii) f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ eine Basis von W ist.

2. Aufgabe

(i) Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von V und $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von W ist.

(ii) Betrachten Sie die durch $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ gegebene lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^{3,1}$. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(A)$ sowie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(A))$. Bestimmen Sie hieraus $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(A))$ und berechnen Sie *anschließend* eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

3. Aufgabe

Sei

$$\begin{aligned} P_2(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists\, p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} : f(x) = p(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

der Vektorraum der polynomialen Abbildungen vom Grad höchstens 2. Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}_1$ von $P_2(\mathbb{R})$ an und bestimmen Sie anschließend die darstellende Matrix der Abbildung

$$I : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

bzgl. $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2 = \{1\}$, also $[I]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

4. Aufgabe
Sei

$$D : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 2}, \quad p = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j t^j \mapsto D(p) := 3\alpha_3 t^2 + 2\alpha_2 t + \alpha_1.$$

(i) Zeigen Sie, dass D linear ist.

(ii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von D bezüglich der Basen $\mathcal{B}_1 := \{1, t, t^2, t^3\}$ von $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ und $\mathcal{B}_2 := \{1, t, t^2\}$ von $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.

(iii) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von $[D]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

(iv) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von D.

(v) Seien $\widetilde{\mathcal{B}}_1 := \{t^3, t^2, t, 1\}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}_2 := \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ Basen von $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ und $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$. Bestimmen Sie die Basisübergangsmatrizen $[\mathrm{id}]_{\widetilde{\mathcal{B}}_1,\mathcal{B}_1}$, $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1,\widetilde{\mathcal{B}}_1}$, $[\mathrm{id}]_{\widetilde{\mathcal{B}}_2,\mathcal{B}_2}$ und $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2,\widetilde{\mathcal{B}}_2}$.

(vi) Bestimmen Sie $[D]_{\widetilde{\mathcal{B}}_1,\widetilde{\mathcal{B}}_2}$ aus $[D]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ durch Basiswechsel.

Gesamtpunktzahl: 0