Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 18.04.2011

1. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Vollständigkeit ist keine Eigenschaft der Topologie) **5 Punkte**

Seien $d, \rho\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$d(x,y) = |x-y|, \qquad \rho(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|.$$

(a) Zeigen Sie, dass ρ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, welche dieselbe Topologie wie d erzeugt.

(b) Finden Sie eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, \rho)$, welche in $(\mathbb{R}, d)$ keine Cauchyfolge ist.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass $(\mathbb{R}, \rho)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 2 (Der Raum der beschränkten Folgen) **5 Punkte**

Als Raum der reellen beschränkten Folgen bezeichnet man die Menge

$$\ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sup_k |x_k| < \infty\}$$

versehen mit der Metrik

$$d(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|.$$

(a) Beweisen Sie, dass ℓ_∞ vollständig ist.

(b) Beweisen Sie, dass ℓ_∞ nicht separabel ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Teilmenge aller Folgen, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen, überabzählbar ist.

Aufgabe 3 (Der Raum der konvergenten Folgen) **4 Punkte**

Sei c der Raum aller konvergenten reellen Zahlenfolgen. Wir betrachten ihn als Teilraum von ℓ_∞, d.h. mit der gleichen Metrik wie in Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass c in ℓ_∞ abgeschlossen ist. (Nach Aufgabe 2(a) ist c damit insbesondere vollständig.)

(b) Zeigen Sie, dass c separabel ist.

Aufgabe 4 (Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen) **4 Punkte**

Auf dem Raum $C^1([a,b])$ der auf dem Intervall $[a,b]$ stetig differenzerbaren Funktionen betrachten wir die Metrik

$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x) - g'(x)|.$$

(a) Beweisen Sie, dass $(C^1([a.b]), d)$ vollständig ist.

(b) Beweisen Sie, dass $(C^1([a.b]), d)$ separabel ist.

Hinweis: In der Übung wurde gezeigt, dass sich jede stetige Funktion im Sinne der Supremumsnorm durch ein Polynom mit rationalen Koeffizienten approximieren lässt, und dass die Menge dieser Polynome abzählbar ist.

Bemerkung: Entsprechend wird $C^m([a,b])$ mit der Metrik $d(f,g) = \sum_{k=0}^m \sup_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)|$ zu einem vollständigen und separablen metrischen Raum.

Abgabe: In der Woche vom 25. bis 29. April im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Topologisch äquivalente Metriken)

1. Zwei Metriken d, ρ auf einer Menge M *erzeugen dieselbe Topologie*, wenn jede Menge $A \subseteq M$ genau dann in (M, d) offen ist, wenn sie in (M, ρ) offen ist. Zeigen Sie, dass dies äquivalent dazu ist, dass eine Folge (x_n) genau dann in (M, d) konvergiert, wenn sie in (M, ρ) konvergiert.
2. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

   $$\rho\colon M \times M \to [0,1]\colon (x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

   ebenfalls eine eine Metrik auf M ist. Erzeugt ρ die gleiche Topologie wie d?

Aufgabe 2 (Häufungspunkte von Folgen)
Sei (x_n) eine Folge in einem metrische Raum. Jeder Grenzwert einer konvergenten Teilfolge heißt *Häufungspunkt* der Folge. Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (Der Raum der summierbaren Folgen)
Als Raum der reellen summierbaren Folgen bezeichnet man die Menge

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

versehen mit der Metrik

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass es sich wirklich um eine Metrik handelt. Beweisen Sie, dass ℓ_1 vollständig und separabel ist.

Aufgabe 4 (Äquivalente Charakterisierungen von Stetigkeit)
Seien (M_1, d_1), (M_2, d_2) zwei metrische Räume. Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ genau dann (im Sinne der ϵ-δ-Definition 1.2.1) stetig ist, wenn das Urbild jeder in M_2 offenen Menge offen in M_1 ist.

Aufgabe 5 (Stetigkeit der Metrik)
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Implikation:

$$x_n \to x, \quad y_n \to y \quad \Longrightarrow \quad d(x_n, y_n) \to d(x,y).$$