Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 25.04.2011

2. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Der Abstand zu Mengen) **4 Punkte**

Sei (M,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$ und $\varrho \colon M \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \operatorname{dist}(x,A) := \inf\limits_{y\in A} d(x,y)$.

(i) Beweisen Sie, dass ϱ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn $\varrho(x) > 0$ für alle $x \in M \setminus A$ gilt.

Aufgabe 2 (Separabilität von Teilräumen) **3 Punkte**

Es sei (M,d) ein separabler metrischer Raum und $A \subseteq M$. Beweisen Sie, dass auch (A,d) separabel ist.

Bemerkung: In topologischen Räumen ist diese Aussage im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 3 (Zum Satz von Arzelà-Ascoli) **4 Punkte**

Seien $K_1, K_2 > 0$ und $a < b$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A = \{f \in C^1([a,b]) \mid f([a,b]) \cap [-K_1,K_1] \neq \emptyset,\ \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < K_2\}$$

in $C([a,b])$ (bzgl. der üblichen Supremumsmetrik) relativ kompakt ist.

Aufgabe 4 (Ein Fixpunktsatz für Kompakta) **5 Punkte**

Sei (M,d) ein kompakter metrischer Raum und $f \colon M \to M$ erfülle

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in M \text{ mit } x \neq y.$$

Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt $x^* = f(x^*) \in M$ besitzt, und dass die rekursive Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in M$ gegen x^* konvergiert.

Hinweis: Untersuchen Sie die Extrema der Abbildung $x \mapsto d(x, f(x))$ und die Monotonie der Folge $(d(x_n, x^*)) \subset \mathbb{R}$.

Bemerkung: Machen Sie sich den Unterschied zum Banachschen Fixpunktsatz klar. In einem nur vollständigen metrischen Raum ist die angegebene Bedingung nicht hinreichend für die Existenz eines Fixpunkts.

Abgabe: In der Woche vom 2. bis 6. Mai im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Kompaktheit ist eine intrinsische Eigenschaft)
Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Beweisen Sie, dass A genau dann kompakt ist in (M,d), wenn (A,d) ein kompakter metrischer Raum ist.

Überlegen Sie sich einige Beispiele.

Aufgabe 2 (Eine andere Metrik auf $C([0,1])$, Kompaktheit)
Auf $C([0,1])$ betrachen wir die Metrik

$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x,$$

sowie die Mengen

$$A_1 = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad A_2 = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in (0,1)\}, \quad A_3 = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in [0,1]\}.$$

Welche dieser Mengen ist in $(C([0,1]), \rho)$ kompakt? Ändert sich etwas, wenn man die übliche Supremumsmetrik betrachtet?

Aufgabe 3 (Isometrien auf Kompakta, Nichtkompaktheitskriterien)
In dieser Aufgabe sei (M,d) ein kompakter metrischer Raum.

1. Beweisen Sie: Ist $f\colon M \to M$ eine *Isometrie*, d.h. gilt $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in M$, so ist f surjektiv.
2. Sei $C(M, \mathbb{R})$ der Raum der auf M stetigen Funktionen bzgl. der üblichen Supremumsmetrik. Folgern Sie aus 1. folgendes Nichtkompaktheitskriterium für Teilmengen von $C(M, \mathbb{R})$:

   Ist $f\colon M \to M$ stetig und surjektiv und $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ eine Menge stetiger Funktionen mit der Eigenschaft, dass

   $$\{\varphi \circ f \mid \varphi \in A\} \subsetneq A,$$

   so ist A in $C(M, \mathbb{R})$ nicht kompakt.
3. Zeigen Sie, dass die Menge

   $$A = \{\varphi_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   in $C([0,1])$ beschränkt und abgeschlossen ist. Ist sie kompakt?

Aufgabe 4 (Relativ kompakte und präkompakte Mengen)
Zeigen Sie:

(a) Jede Teilmenge einer relativ kompakten Menge eines metrischen Raumes ist wieder relativ kompakt.

(b) Jede Teilmenge einer präkompakten Menge eines metrischen Raumes ist wieder präkompakt.

(c) Seien $A_1, A_2 \subseteq (M,d)$. Sind A_1 und A_2 relativ kompakt (präkompakt), so ist auch $A_1 \cup A_2$ relativ kompakt (präkompakt).