Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 02.05.2011

3. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Summen von Mengen) **4 Punkte**

Sind A, B zwei Teilmengen eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$, so bezeichnet man mit $A + B$ die Menge aller Summen $a + b$ mit $a \in A, b \in B$. Man zeige:

(a) Ist A oder B offen, so ist $A + B$ offen.

(b) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

(c) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so ist $A + B$ abgeschlossen.

(d) Sind A und B abgeschlossen, so muss $A + B$ nicht abgeschlossen sein.

Hinweis: Finden Sie ein Beispiel in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Parallelotope in ℓ_2) **4 Punkte**

Sei $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_2$ und

$$H_y = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2 \mid |x_i| \leq |y_i| \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}.$$

Beweisen Sie, dass H_y präkompakt ist. Folgern Sie, dass H_y sogar kompakt ist.

Bemerkung: Für $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ heißt H_y *Hilbertsches Parallelotop*. Es ist ein Beispiel einer unendlich-dimensionalen kompakten Menge.

Aufgabe 3 (Inklusionsbeziehungen zwischen ℓ_p-Räumen) **6 Punkte**

(a) Sei $1 \leq p < q \leq \infty$ und $x \in \ell_1$. Zeigen Sie

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Dies impliziert $\ell_p \subset \ell_q$. Diese Inklusion ist bekanntlich echt.

Hinweis: Der Fall $\|x\|_p = \infty$ ist trivial. Andernfalls kann man stets $\|x\|_p = 1$ annehmen.

(b) Beweisen Sie: $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

(c) Sei c_0 der Raum aller Nullfolgen. Zeigen Sie: $\bigcup\limits_{1 \leq p < \infty} \ell_p \subsetneq c_0$.

Aufgabe 4 (Separabilität normierter Räume) **4 Punkte**

Beweisen Sie, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann separabel ist, wenn die Einheitssphäre $S(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ in ihm separabel ist.

Hinweis: Nehmen Sie keinen Bezug zu Aufgabe 2 vom 2. Übungsblatt.

Abgabe: In der Woche vom 9. bis 15. Mai im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Metriken, die von einer Norm erzeugt werden)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und X ein Vektorraum. Unter welchen Voraussetzungen an d gibt es eine Norm auf X, welche die Metrik d induziert?

Aufgabe 2 (Kugeln in metrischen Räumen)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$. Zeigen Sie:

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Geben Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum (M, d), in welchem

$$\overline{B(x_0, 1)} \neq \{x \in M \mid d(x_0, x) \leq 1\}$$

gilt.

Aufgabe 3 (Normen auf $C^1([0,1])$)
Für $f \in C^1([0,1])$ betrachten wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\|f\|_{1,\infty} &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \\
|||f|||_1 &= |f(0)| + \|f'\|_\infty, \\
|||f|||_2 &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_\infty\}, \\
|||f|||_3 &= \Big(\int_0^1 |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich, dass alle vier Ausdrücke Normen auf $C^1([0,1])$ definieren. Welche von ihnen sind (paarweise) äquivalent?

Aufgabe 4 (Echte Unterräume sind nicht offen)
Beweisen Sie: Enthält ein linearer Teilraum U eines normierten Raums X eine in X offene Menge, so ist $U = X$.

Aufgabe 5 (Finite Folgen)
Sei X die Menge aller reellen Zahlenfolgen, die nur endlich viele von Null verschieden Glieder besitzen. Zeigen Sie: X ist ein linearer Teilraum von ℓ_1, aber nicht abgeschlossen. Somit ist $(X, \|\cdot\|_1)$ kein Banachraum.