Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 09.05.2011

4. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Geometrische Eigenschaften von Normen) **5 Punkte**

1. Es sei $X \neq \{0\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass B genau dann die abgeschlossene Einheitskugel einer Norm auf X ist, wenn gilt:
   (i) B ist konvex,
   (ii) B ist *äquilibriert*, d.h. für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$ ist mit $x \in B$ auch $\lambda x \in B$,
   (iii) für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ existiert $\max\{|\lambda| > 0 \mid \lambda x \in B\}$.
2. Ist der Hilbertquader $H_y \subset \ell_2$ mit $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ (vgl. Aufgabe 2 von Blatt 3) die Einheitskugel einer Norm auf ℓ_2?

   Zusatz: Beantworten Sie die gleiche Frage für ein beliebiges $y \in \ell_2$.

Aufgabe 2 (Berechnung von Operatornormen) **6 Punkte**
Prüfen Sie, ob die folgenden linearen Funktionale stetig sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Norm:

(a) $T\colon (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}\colon f \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(t_k)$,

wobei $t_1 < \dots < t_n \in [a,b]$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben sind.

(b) $T\colon (c, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}\colon x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

wobei c der Raum der konvergenten reellen Folgen ist.

(c) $T\colon (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}\colon x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$,

wobei c_0 der Raum der reellen Nullfolgen ist.

Aufgabe 3 (Hyperebenen in normierten Räumen) **7 Punkte**

1. Sei X ein reeller normierter Raum und $T\colon X \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Der Kern von T ist ein linearer Teilraum $H = \mathcal{N}(T) = \{x \in X \mid Tx = 0\}$ von X. Es sei $H \neq X$ und $a \in X \setminus H$. Zeigen Sie:
   (a) Es gilt $X = \mathbb{R}a + H = \{\lambda a + b \mid \lambda \in \mathbb{R},\, b \in H\}$.
   (Man sagt, H ist eine *Hyperebene der Kodimension* 1.)
   (b) H ist entweder abgeschlossen oder dicht in X.
   (c) H ist genau dann abgeschlossen, wenn T stetig. In diesem Fall gilt $\|T\| = \dfrac{|Ta|}{\inf_{b\in H} \|a-b\|}$.
   Daraus folgt die nützliche Formel[1] $\operatorname{dist}(a,H) = \dfrac{|Ta|}{\|T\|}$.
2. Betrachten Sie nun in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ das Funktional T aus Aufgabe 2(c) und die zugehörige Hyperebene

$$H = \mathcal{N}(T) = \Big\{x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0 \,\Big|\, Tx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n = 0\Big\}.$$

   Da T stetig ist, ist H in c_0 abgeschlossen. Zeigen Sie aber, dass für kein $a \in c_0 \setminus H$ ein $b \in H$ existiert, für welches $\operatorname{dist}(a,H) = \|a-b\|_\infty$ gilt.

Abgabe: In der Woche vom 16. bis 22. Mai im Tutorium.

[1] Beide Formeln bleiben gewissermaßen für unbeschränkte Operatoren gültig, wenn man $\|T\| = \infty$ setzt. Nach (b) ist dann nämlich $\operatorname{dist}(a,H) = 0$.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Abgeschlossene Teilräume)
Sei X eine normierter Raum und $U \subseteq X$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{U}$ ein linearer Teilraum von X ist. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass $U \subsetneq \overline{U} \subsetneq X$ gelten kann.

Aufgabe 2 (Endlichdimensionale injektive Abbildungen)
Seien X, Y Vektorräume und $T\colon \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ linear. Zeigen Sie: Ist $\dim \mathcal{D}(T) = n$ und $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, so ist $\dim \mathcal{R}(T) = n$.

Aufgabe 3 (Stetigkeit linearer Abbildungen)

1. Beweisen Sie, dass ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn er beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet.
2. Es seien X und Y normierte Räume und $T\colon X \to Y$ linear. Man beweise: Ist für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to 0$ die Folge (Tx_n) in Y beschränkt, so ist T stetig.

Aufgabe 4 (Inverse lineare Abbildungen müssen nicht stetig sein)
Betrachten Sie den linearen Operator

$$T\colon \ell_\infty \to \ell_\infty\colon x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto Tx = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Zeigen Sie:

(a) T ist stetig mit $\|T\| = 1$.

(b) T ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(c) $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \to \ell_\infty$ ist nicht stetig.

Aufgabe 5 (Unbeschränkte Koordinatenprojektionen)
Wir betrachten den Raum P der reellen Polynome auf $[0,1]$ mit der Norm $\|p\| = \int_0^1 |p(t)| \,\mathrm{d}t$. Die Monome t^k bilden in ihm bekanntlich eine abzählbare Hamel-Basis (daher kann der Raum übrigens nicht vollständig sein). Zeigen Sie, dass die zugehörigen Koordinatenprojektionen

$$\pi_k\colon P \to \mathbb{R}\colon \sum_{j=0}^{n} a_j t^j \mapsto a_k \quad \text{(bzw. 0, falls } n < k\text{)}$$

nicht stetig sind.