Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 16.05.2011

5. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Untere Schranken für Operatoren) **4 Punkte**
In dieser Aufgabe seien X ein normierter Raum und $S, T \in L(X)$. Der Operator T sei *nach unten beschränkt*, d.h., es gebe eine Konstante $m > 0$, sodass

$$\|Tx\| \geq m\|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

(a) Zeigen Sie, dass T genau dann eine stetige Inverse besitzt, wenn T surjektiv ist. Überdies gilt dann

$$\|T^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{\|x\|=1} \|Tx\|} \leq \frac{1}{m}.$$

(b) Beweisen Sie die allgemeinere Abschätzung

$$\|ST\| \geq \sup_{\substack{y \in \mathcal{R}(T) \\ \|y\|=1}} \|Sy\| \cdot \inf_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \sup_{\substack{y \in \mathcal{R}(T) \\ \|y\|=1}} \|Sy\| \cdot m,$$

welche die aus (a) als Spezialfall enthält.

Aufgabe 2 (Vertauschung von Operatoren) **4 Punkte**
Sei X ein normierter Raum und S, T lineare Operatoren von X nach X. Zeigen Sie: Gilt

$$ST - TS = I,$$

so ist S oder T unbeschränkt.

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Formel für ST^{n+1} her.

Aufgabe 3 (Neumannschen Reihe und Integraloperatoren) **5 Punkte**
Betrachten Sie auf $(X, \|\cdot\|) = (C[0,2], \|\cdot\|_\infty)$ den Operator

$$T\colon X \to X\colon f \mapsto Tf, \quad (Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|T\| = 2$.

(b) Beweisen Sie, dass die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^\infty T^n$ in $L(X)$ dennoch konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie die äquivalente Norm $|||f||| = \sup_{t\in[0,2]} e^{-2t}|f(t)|$ und zeigen Sie, dass dies denselben Raum $L(X)$ ergibt.

(c) Beweisen Sie, dass zu jeder Funktion $g \in C[0,2]$ eine Funktion $f \in C[0,2]$ existiert, sodass $f - g$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Formel für f an.

Aufgabe 4 (Der Spektralradius) **5 Punkte**
Sei X ein Banachraum. Der *Spektralradius* eines beschränkten Operators $A \in L(X)$ ist definiert als

$$\rho(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Beweisen Sie:

(a) $\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|}$

(b) Es gilt genau dann $\rho(A) < 1$, wenn die Neumannsche Reihe $\sum_{n=0}^\infty A^n$ konvergiert.
Bemerkung: Dies ist übrigens genau dann der Fall, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, für welches $\|A^N\| < 1$ gilt. Im Gegensatz zu geometrischen Zahlenreihen ist also die Bedingung $\|A\| < 1$ für die Konvergenz der Neumannschen Reihe zwar hinreichend, aber nicht notwendig.

Abgabe: In der Woche vom 23. bis 29. Mai im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Invertierbare Operatoren)
Es seien X ein normierter Raum und $A, B \in L(X)$. Zeigen Sie:

(a) Ist AB invertierbar, so gilt

  (i) $\mathcal{R}(A) = X$, $\mathcal{N}(B) = \{0\}$ und $\mathcal{R}(B)$ ist abgeschlossen.

  (ii) $\mathcal{R}(BA) = \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{N}(BA) = \mathcal{N}(A)$ und $X = \mathcal{R}(B) + \mathcal{N}(A)$.

(b) Sind AB und BA invertierbar, so sind A und B invertierbar.

(c) Geben Sie ein Beispiel, wo AB invertierbar ist, jedoch weder A, B oder BA.

Aufgabe 2 (Die Resolvente)
Sei X ein Banachraum und A in $L(X)$. Zeigen Sie, dass ein $M > 0$ existiert, sodass $(A - \lambda I)^{-1}$ für alle $\lambda > M$ existiert mit

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - M}.$$

Aufgabe 3 (Operatoren auf $L(X)$)
Seien X ein normierter Raum und $A, B \in L(X)$. Betrachten Sie

$$T \colon L(X) \to L(X) \colon C \mapsto ACB.$$

Zeigen Sie $T \in L(L(X))$ und $\|T\| \leq \|A\|\|B\|$.

Aufgabe 4 (Shiftoperator)
Betrachten Sie in ℓ_2 den sog. *(Rechts-)Shiftoperator*

$$S \colon \ell_2 \to \ell_2 \colon x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto Sx = (x_2, x_3, \dots).$$

(a) Ist die Folge $(\|S^n x\|_2)_n$ für festes x beschränkt? Existiert $\lim\limits_{n \to \infty} \|S^n x\|_2$?

(b) Berechnen Sie $\|S^n\|$.

(c) Existiert $\lim\limits_{n \to \infty} S^n$ in $L(\ell_2)$?

Aufgabe 5 (Distanzabschätzungen zwischen inversen Operatoren)
Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$ invertierbar mit $A^{-1} \in L(X)$. Für $B \in L(X)$ gelte $\|I - A^{-1}B\| < 1$. Zeigen Sie, dass B dann invertierbar ist mit

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|I - A^{-1}B\|}$$

und

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|\|I - A^{-1}B\|}{1 - \|I - A^{-1}B\|}.$$

Folgern Sie, dass die Menge aller invertierbaren Operatoren in $L(X)$ offen ist.