Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 23.05.2011

6. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Eigenschaften kompakter Operatoren) **8 Punkte**

Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum und $T \in K(X)$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) T kann keine stetige Inverse besitzen.

(b) $\mathcal{N}(I - T)$ ist endlichdimensional.

(c) Ist $(I - T)$ bijektiv, so ist $(I - T)^{-1}$ stetig.

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass dies für alle beschränkten Operatoren T richtig ist. Der Beweis ist aber ungleich schwieriger.

(d) $\operatorname{dist}(I, K(X)) = \inf\limits_{T \in K(X)} \|I - T\| = 1$.

Hinweis: $T = I - (I - T)$.

Aufgabe 2 (Bildmengen unter kompakten Operatoren) **2 Punkte**

Finden Sie ein Beispiel eines kompakten Operators $T\colon X \to Y$, für welchen $\mathcal{R}(T)$ unendlichdimensional und $T(\overline{B(0,1)})$ kompakt ist.

Aufgabe 3 (Orthogonale Projektion) **4 Punkte**

Betrachten Sie den reellen ℓ_2 mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$M = \Big\{ x \in \ell_2 \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M ein linearer Teilraum von ℓ_2 ist.

(b) Ist M abgeschlossen?

(c) Bestimmen Sie $M^{\perp}$.

(d) Zerlegen Sie $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in \ell_2$ in $x = m + m^{\perp}$ mit $m \in M$, $m^{\perp} \in M^{\perp}$.

Aufgabe 4 (Projektionen auf orthogonale Teilräume) **6 Punkte**

Seien $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $U, V \subset X$ abgeschlossene Teilräume und P_U, P_V die entsprechenden Orthogonalprojektionen. Beweisen Sie:

(a) Es gilt genau dann $P_U P_V = 0$, wenn $U \perp V$.

(b) Ist $U \perp V$, so ist $P_U + P_V$ ein orthogonaler Projektor auf $U \oplus V$.

Die Aussage in (b) erlaubt eine interessante Folgerung: Ist X mindestens zweidimensional, so ist $L(X)$ kein Hilbertraum, d.h., die Operatornorm wird nicht durch ein Skalarprodukt erzeugt. Beweisen Sie dies.

Abgabe: In der Woche vom 6. bis 10. Juni im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Hilbert-Schmidt-Operatoren)
Sei $A = (a_{ij})$ ein unendliche, quadratsummierbare Matrix, d.h. es gelte $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass der lineare Operator

$$A\colon \ell_2 \to \ell_2\colon x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto Ax = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j, \dots\Big)$$

wohldefiniert, beschränkt und kompakt ist.

Aufgabe 2 (Separabilität des Bildes kompakter Operatoren)
Seien X, Y normierte Räume. Beweisen Sie Punkt (6) aus Satz 2.4.7:

Ist $T \in K(X, Y)$, so sind $\mathcal{R}(T)$ und $\overline{\mathcal{R}(T)}$ separabel.

Aufgabe 3 (Abgeschlossene Mengen ohne beste Approximation)
Sei $T\colon X \to X$ ein linearer Operator mit $\|Tx\| < \|x\|$ für alle $x \neq 0$ und $\|T\| = 1$. Zeigen Sie, dass $A = \{x \in X \mid \|Tx\| \geq 1\}$ abgeschlossen ist, aber keine beste Approximation an den Ursprung enthält.

Konvergiert die Folge $(y_n) \subset \mathbb{R}^+$ von unten gegen 1, so ist $(x_n) \mapsto (y_n \cdot x_n)$ ein solcher Operator in ℓ_2.

Aufgabe 4 (Strikt konvexe Räume)
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *strikt konvex*, wenn für alle normierten $x, y \in X$, $x \neq y$, und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt, dass $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$. Zeigen Sie:

(a) Ist X reell, so ist X genau dann strikt konvex, wenn $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ nur für linear abhängige $x, y \in X$ gilt.

(b) Jeder Prähilbertraum ist strikt konvex.

(c) Ist $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ein Hilbertraum, d.h., wird die Supremumsnorm durch ein Skalarprodukt erzeugt?

(d) Finden Sie ein Beispiel eines strikt konvexen Raumes, welcher kein Prähilbertraum ist.

Bemerkung: Die strikt konvexen Räume haben die wichtige Eigenschaft, dass Elemente bester Approximationen an konvexe Mengen, wenn sie denn existieren, stets eindeutig sind. (Beweis?)

Aufgabe 5 (Orthogonales Komplement)
Sei $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit nichtleerem Inneren. Zeigen Sie $A^\perp = \{0\}$.