TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 06.06.2011

7. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Orthogonale Komplemente) **3 Punkte**

Geben Sie ein Beispiel eines Prähilbertraums X und eines Unterraums $U \subseteq X$, sodass $\overline{U} \neq U^{\perp\perp}$ gilt.

Aufgabe 2 (Gramsche Matrizen) **6 Punkte**

Ist $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $X^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X\}$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i\rangle$. Als *Gramsche Matrix* von $\mathbf{x} \in X^n$ bezeichnen wir die hermitesche Matix $G(\mathbf{x}) = [\langle x_i, x_j\rangle]_{i,j=1,\ldots,n}$.

(a) Beweisen Sie, dass die Menge

$$M = \{\mathbf{x} \in X^n \mid \; I - G(\mathbf{x}) \text{ ist positiv semidefinit}\}$$

beschränkt, abgeschlossen und konvex ist.

(b) Charakterisieren Sie ∂M.

(c) Ist M die abgeschlossene Einheitskugel einer Norm auf X^n? Wenn ja, ist diese Norm zu $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ äquivalent?

Aufgabe 3 (Fortsetzung linearer Funktionale) **5 Punkte**

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und f ein lineares stetiges Funktional auf U.

(a) Beweisen Sie, dass f in genau einer Weise zu einem linearen stetigen Funktional $\tilde{f}$ auf ganz X fortgesetzt werden kann, sodass $\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{U'}$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie nicht den Satz von Hahn-Banach aus der Vorlesung

(b) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ das euklidische Skalarprodukt und

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}.$$

Bestimmen Sie für $f\colon U \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_1$ die nach (a) eindeutig bestimmte Fortsetzung $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (Abstand zu Unterräumen) **4 Punkte**

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $U \subseteq X$ ein linearer Teilraum.

(a) Zeigen Sie: Für ein $x \in X$ gilt genau dann $\|x\| = \operatorname{dist}(x, U)$, wenn $x \in U^\perp$.

(b) Sei nun U endlichdimensional und $V \subseteq X$ ein weiterer linearer Teilraum mit $\dim V > \dim U$. Beweisen Sie, dass ein $x \neq 0$ in V existiert mit $\|x\| = \operatorname{dist}(x, U)$.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Aussage in (b) im Falle $\dim V \leq \dim U$ selbst dann nicht richtig ist, wenn beide Räume unendlichdimensional und abgeschlossen sind und $U \cap V = \{0\}$ gilt.

Abgabe: In der Woche vom 13. bis 17. Juni im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Eine Zerlegung von L_2)
Sei $L_2(\mathbb{R})$ der Raum der reellen, messbaren und über $\mathbb{R}$ quadratintegrablen Funktionen, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Sei weiterhin

$$L_2^g(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ f.ü.}\}$$

der Unterraum der geraden L_2-Funktionen. Zeigen Sie, dass $L_2^g(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist und bestimmen Sie den orthogonalen Projektor sowie das orthogonale Komplement.

Aufgabe 2 (Konvergenz im Dualraum)
Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $x \mapsto F_x = \langle\cdot, x\rangle$ die Rieszabbildung von X nach X'. Beweisen Sie folgende Äquivalenz:

$$x_n \to x \text{ in } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_{x_n}(y) \to F_x(y) \text{ für alle } y \in X \quad \text{und} \quad \|x_n\| \to \|x\| \text{ in } \mathbb{R}.$$

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die punktweise Konvergenz der F_{x_n} allein für die Konvergenz von x_n nicht hinreichend ist.

Bemerkung: Die punktweise Konvergenz $F_{x_n}(y) \to F_x(y)$ heißt schwache Konvergenz und wird später noch eine große Rolle spielen.

Aufgabe 3 (Konvergenz orthogonaler Reihenentwicklungen)
Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, F_x die Rieszabbildung (s.o.) und $(x_n) \subseteq X$ eine Folge paarweise orthogonaler Elemente. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert in X,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ konvergiert in $\mathbb{R}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} F_{x_n}$ konvergiert in X'.

Aufgabe 4 (Bestimmung einiger Dualräume)
Zeigen Sie:

(a) $\ell_1' \cong \ell_\infty$,

(b) $\ell_p' \cong \ell_q \quad$ für $1 < p < \infty$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

(c) $c_0' \cong c' \cong \ell_1$.