Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 13.06.2011

# 8. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

**Aufgabe 1 (Fortsetzung von Funktionalen)** **4 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|) = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $x_0 \in X$ mit $x_0(t) = 1 - 2t$, $M = \operatorname{lin}\{x_0\}$ und $m' \colon M \to \mathbb{R} \colon \lambda x_0 \mapsto \lambda$.

(a) Zeigen Sie $m' \in M'$ und bestimmen Sie $\|m'\|_{M'}$.

(b) Finden Sie zwei verschiedene lineare, stetige Fortsetzungen $x_1'$ und $x_2'$ von $m'$ auf ganz $X$ mit $\|x_1'\|_{X'} = \|x_2'\|_{X'} = \|m'\|_{M'}$.

**Aufgabe 2 (Biorthogonalisierung)** **4 Punkte**

Ein System $\{x_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, von Elementen eines normierten Raums $X$ heißt *minimal*, wenn für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt: $x_\lambda \notin \overline{\operatorname{lin}\{x_\mu \mid \mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}\}}$.

Beweisen Sie, dass ein System $\{x_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, genau dann minimal ist, wenn es sich *biorthogonalisieren* lässt, d.h., wenn ein System von Funktionalen $\{x_\lambda'\} \subseteq X'$, $\lambda \in \Lambda$, existiert mit

$$x_\lambda'(x_\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \mu, \\ 1 & \text{für } \lambda = \mu. \end{cases}$$

**Aufgabe 3 (Separable Banachräume)** **4 Punkte**

Sei $X$ ein separabler Banachraum. Beweisen Sie, dass eine lineare Isometrie $T \colon X \to \ell_\infty$ existiert. Ist $X$ sogar isometrisch isomorph zu $\ell_\infty$?

**Aufgabe 4 (Fortsetzung von Operatoren)** **4 Punkte**

Sei $X$ ein normierter Raum, $U \subseteq X$ ein Unterraum und $T \in L(U, \ell_\infty)$. Zeigen Sie, dass ein $S \in L(X, \ell_\infty)$ existiert mit $S|_U = T$ und $\|S\| = \|T\|$.

**Abgabe:** In der Woche vom 20. bis 24. Juni im Tutorium.

## Tutoriumsvorschläge

**Aufgabe 1 (Der Dualraum der beschränkten Folgen)**
Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$T\colon \ell_1 \to (\ell_\infty)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

eine stetige Isometrie, aber nicht surjektiv ist.

*Hinweis:* Wenden Sie den Satz von Hahn-Banach auf $c \subset \ell_\infty$ an.

**Aufgabe 2 (Fortsetzung von Funktionalen auf dichten Teilräumen)**
Sei $U$ ein Unterraum eines normierten Raums $X$. Zeigen Sie, dass $U$ genau dann in $X$ dicht ist, wenn es zu jedem $f \in U'$ eine eindeutige lineare, stetige Fortsetzung $x' \in X'$ gibt. Diese erfüllt $\|x'\|_{X'} = \|f\|_{U'}$.

*Hinweis:* Beweisen Sie die Notwendigkeit der Bedingung nicht mit dem Satz von Hahn-Banach.

**Aufgabe 3 (Zu Hahn-Banach)**
Sei $X$ ein normierter Raum, $U \subseteq X$ ein beliebige Teilmenge. Zeigen Sie:

$$\overline{\operatorname{lin}(U)} = \bigcap_{\substack{x' \in X' \\ U \subset \mathcal{N}(x')}} \mathcal{N}(x').$$

**Aufgabe 4 (Normerhaltende Fortsetzungen eines Funktionals)**
Sei $X$ ein normierter Raum, $U \subsetneq X$ ein Unterraum und $f \in U'$. Sei weiter

$$E(f) = \{x' \in X' \mid x'|_M = f,\ \|x'\|_{X'} = \|f\|_{U'}\}$$

die Menge der normerhaltenden, stetigen Erweiterungen von $m'$. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist $E(f)$ nicht leer.

Zeigen Sie, dass $E(f)$ abgeschlossen und konvex ist. Insbesondere ist $E(f)$ damit entweder einelementig oder überabzählbar. Zeigen Sie, dass ersteres der Fall ist, wenn $X'$ strikt konvex ist.