Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 20.06.2011

9. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Trennung konvexer Mengen) **5 Punkte**

Sei $P[0,1]$ der Raum der reellen Polynome auf $[0,1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Mit $\kappa(p)$ sei der führende Koeffizient des Polynoms p bezeichnet. Die Mengen

$$U_+ = \{p \in P[0,1] \mid \kappa(p) > 0\} \quad \text{und} \quad U_- = \{p \in P[0,1] \mid \kappa(p) < 0\}$$

sind dann in $P[0,1]$ konvex und disjunkt.

(a) Zeigen Sie, dass es kein Funktional $f \in (P[0,1])'$ gibt, welches U_+ und U_- trennt, d.h., für welches $f(p) < f(q)$ für alle $p \in U_+$ und $q \in U_-$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass weder ein Widerspruch zu Satz 4.5.4 noch zu Satz 4.5.6 vorliegt.

Aufgabe 2 (Nichtreflexivität von $C[0,1]$) **4 Punkte**

(a) Sei X ein reflexiver normierter Raum. Zeigen Sie, dass zu jedem $x' \in X'$ ein $x \in X$ existiert mit $\|x\| = 1$ und $|x'(x)| = \|x'\|$.

(b) Zeigen Sie, dass $C[0,1]$ der Bedingung aus (a) nicht genügt und daher nicht reflexiv sein kann.

Aufgabe 3 (Konvexe Funktionen und schwache Konvergenz) **4 Punkte**

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einem normierten Raum X heißt schwach unterhalb folgenstetig, wenn für jede Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $x_n \rightharpoonup x$ gilt, dass

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Beweisen Sie, dass jede stetige konvexe Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ schwach unterhalb folgenstetig ist.

Aufgabe 4 (Satz von Weierstraß für schwache Konvergenz) **5 Punkte**

(a) Beweisen Sie folgenden wichtigen Satz:

Ist $K \neq \emptyset$ eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines reflexiven normierten Raums, so nimmt jede schwach unterhalb folgenstetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ihr Minimum über K an, d.h. es gibt ein $x_0 \in K$ mit

$$f(x_0) = \inf_{x\in K} f(x).$$

(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ reflexiv, $y \in X$ und $K \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\|y - x\| = \operatorname{dist}(y, K), \quad x \in K,$$

der besten Approximation von y durch Elemente aus K eine Lösung besitzt.

Abgabe: In der Woche vom 27. Juni bis 1. Juli im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Reflexivität und isometrische Isomorphismen)
Seien X und Y normierte Räume, X reflexiv und $X \cong Y$. Zeigen Sie, dass auch Y reflexiv ist.

Aufgabe 2 (Schwache und starke Konvergenz)
Sei X ein normierter Raum und $(x_n) \subseteq X$. Es gelte $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to a$. Zeigen Sie: $\|x\| \leq a$.

Geben Sie ein Beispiel, bei welchem echte Ungleichheit gilt.

Aufgabe 3 (Ein Kriterium für schwache Konvergenz)
Sei X ein normierter Raum und $(x_n) \subseteq X$. Zeigen Sie, dass x_n schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Folge (x_n) ist beschränkt.

(ii) Es gilt $f(x_n) \to f(x)$ für jedes f aus einer Menge $D \subseteq X'$, deren lineare Hülle in X' dicht ist.

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass die Beschränktheit der Folge für die schwache Konvergenz auch notwendig ist.

Aufgabe 4 (Schwache Konvergenz in ℓ_2)
Zeigen Sie, dass eine beschränkte Folge $(x^{(n)}) \subseteq \ell_2$ genau dann schwach konvergiert, wenn sie punktweise konvergiert, d.h., wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ für alle k existiert.

Hinweis: Aufgabe 3.