Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 27.06.2011

10. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Kompakte Operatoren und schwache Konvergenz) **4 Punkte**
Seien X und Y normierte Räume und $T \in L(X, Y)$. Zeigen Sie:

(a) Ist T kompakt, so gilt für alle Folgen $(x_n)_n \subseteq X$ und $x \in X$

$$x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; Tx_n \longrightarrow Tx.$$

(b) Ist X reflexiv und gilt für alle $(x_n)_n \subseteq X$ und $x \in X$

$$x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow\; Tx_n \longrightarrow Tx,$$

so ist T ein kompakter Operator.

Aufgabe 2 (Schwache Cauchyfolgen) **3 Punkte**
Sei X ein reflexiver normierter Vektorraum und $(x_n)_n$ eine Folge in X, sodass $(f(x_n))_n$ für alle Funktionale $f \in X'$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ schwach konvergiert.

Aufgabe 3 (Satz von Baire) **5 Punkte**
Eine Menge in einem metrischen Raum heißt G_δ, falls sie der Schnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ keine G_δ-Menge ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der Stetigkeitsstellen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine G_δ-Menge ist.

Aufgabe 4 (Metrisierbarkeit der schwach*-Konvergenz) **4 Punkte**
Sei X ein normierter Vektorraum und $\sigma = (x_n)_n$ eine normierte, separierende Folge in X, d.h. $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\operatorname{lin}}\,\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = X$. Prüfen Sie, dass durch

$$\|f\|_\sigma := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \,|f(x_n)|\,, \;\; f \in X'$$

eine Norm auf X' definiert wird und zeigen Sie, dass eine $\|\cdot\|_{X'}$-beschränkte Folge $(f_n)_n \subseteq X'$ genau dann schwach* gegen f konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_\sigma \longrightarrow 0$.

Abgabe: In der Woche vom 4. Juli bis 8. Juli im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Banachräume haben keine abzählbar-unendliche Basis)
Zeigen Sie mit dem Satz von Baire, dass Banachräume keine abzählbar-unendliche Basis haben können.

Aufgabe 2 (Schwache Folgenstetigkeit)
Sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator zwischen normierten Räumen. Zeigen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in X gilt

$$x_n \rightharpoonup 0 \ \Rightarrow \ Tx_n \rightharpoonup 0.$$

Aufgabe 3 (Approximationen des Differentialoperators)
Wir statten die Räume

$$C_b(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

und

$$C_b^1(\mathbb{R}) := \left\{f \in C_b(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid f' \in C_b(\mathbb{R})\right\}$$

mit der Supremumsnorm aus. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n : C_b^1(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ mit $(T_n f)(x) := n \cdot (f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ punktweise beschränkt sind.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge $\{\|T_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt ist und der punktweise Grenzwert der T_n unstetig ist. Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Banach-Steinhaus?

Aufgabe 4 (Umkehrung der Hölder-Ungleichung)
Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und $1 < p < \infty$, sodass für alle $(x_n)_n \in \ell_p$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_n \in \ell_q$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Darf man auch $p = 1$ oder $p = \infty$ zulassen?