Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 04.07.2011

11. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 1

Aufgabe 1 (Zum adjungierten Operator) **4 Zusatzpunkte**

Es seien X und Y Banachräume. Für zwei lineare Operatoren $T\colon X \to Y$ und $S\colon Y' \to X'$ gelte

$$y'(Tx) = (Sy')(x) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } y' \in Y'.$$

Beweisen Sie, dass S und T dann stetig sind. (Insbesondere ist dann $S = T'$.)

Aufgabe 2 (Voraussetzungen im Satz vom abgeschlossenen Graphen) **4 Zusatzpunkte**

Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel dafür, dass die Vollständigkeit von X und Y im Satz vom abgeschlossenen Graphen notwendig ist.

Abgabe: In der Woche vom 11. Juli bis 15. Juli im Tutorium.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1 (Inverse eines abgeschlossenen Operators)
Zeigen Sie, dass ein linearer, injektiver $T\colon X \to Y$ Operator zwischen normierten Räumen genau dann abgeschlossen ist, wenn seine Inverse $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \to X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (Kanonische Projektionen)
Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und U, V abgeschlossene Unterräume, sodass $X = U \oplus V$ gilt. Die zugehörigen kanonischen Projektionen seien mit P_U und P_V bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) P_U und P_V sind stetig.

(b) Der Ausdruck $|||x||| = \sqrt{\|P_U x\|^2 + \|P_V x\|^2}$ definiert eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm.

Aufgabe 3 (Bilder von Operatoren)
Es seien X, Y und Z Banachräume, $S \in L(X, Y)$ und $T \in L(Y, Z)$. Für jedes $x \in X$ gebe es ein eindeutiges $y = A(x) \in Y$ mit

$$Sx = Ty.$$

Zeigen Sie, dass der dadurch definierte Operator $A\colon X \to Y$ linear und stetig ist.

Aufgabe 4 (Unterbestimmte lineare Gleichungen)
Beweisen Sie Lemma 5.5.5: Sind X und Y Banachräume, und hat $T \in L(X, Y)$ abgeschlossenes Bild, so gibt es eine Konstante $k > 0$, sodass für alle $y \in \mathcal{R}(T)$ eine Lösung $x \in X$ der Gleichung $Tx = y$ existiert, für welche $\|x\| \leq k\|y\|$.