

Die Singulärwertzerlegung

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -12 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

hat die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \begin{bmatrix} -0.6613 & 0.2698 & -0.5652 & 0.4129 \\ -0.3029 & -0.4409 & -0.3998 & -0.7443 \\ 0.6121 & 0.4441 & -0.6309 & -0.1733 \\ 0.3101 & -0.7319 & -0.3503 & 0.4954 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 20.1567 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8874 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0701 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.1268 & 0.8261 & 0.5365 & 0.1165 \\ 0.1086 & 0.5612 & -0.7917 & -0.2155 \\ -0.9734 & -0.0401 & -0.1934 & 0.1158 \\ -0.1568 & -0.0305 & 0.2189 & -0.9626 \end{bmatrix}.$$

Hierbei sind die auftretenden Dezimalstellen auf vier Stellen nach dem Komma gerundet.

Wir erhalten die folgenden Rang- k -Approximationen an

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -12 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} :$$

Rang 1:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_1 u_1 v_1^* \\ &= \begin{bmatrix} 1.6897 & -1.4473 & 12.9760 & 2.0898 \\ 0.7740 & -0.6630 & 5.9437 & 0.9572 \\ -1.5640 & 1.3397 & -12.0108 & -1.9343 \\ -0.7923 & 0.6787 & -6.0848 & -0.9799 \end{bmatrix} , \\ A - A_1 &= \begin{bmatrix} 0.3103 & 0.4473 & 0.0240 & -0.0898 \\ -0.7740 & -0.3370 & 0.0563 & 0.0428 \\ 0.5640 & 0.6603 & 0.0108 & -0.0657 \\ -1.2077 & -0.6787 & 0.0848 & -0.0201 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Rang 2:

$$\begin{aligned} A_2 &= \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* \\ &= \begin{bmatrix} 2.1104 & -1.1616 & 12.9556 & 2.0743 \\ 0.0865 & -1.1300 & 5.9770 & 0.9826 \\ -0.8716 & 1.8100 & -12.0444 & -1.9599 \\ -1.9336 & -0.0965 & -6.0294 & -0.9378 \end{bmatrix} , \\ A - A_2 &= \begin{bmatrix} -0.1104 & 0.1616 & 0.0444 & -0.0743 \\ -0.0865 & 0.1300 & 0.0230 & 0.0174 \\ -0.1284 & 0.1900 & 0.0444 & -0.0401 \\ -0.0664 & 0.0965 & 0.0294 & -0.0622 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Wir erhalten die folgenden Rang- k -Approximationen an

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -12 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} :$$

Rang 3:

$$\begin{aligned} A_3 &= \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \sigma_3 u_3 v_3^* \\ &= \begin{bmatrix} 1.9966 & -0.9938 & 12.9966 & 2.0279 \\ 0.0061 & -1.0112 & 6.0060 & 0.9498 \\ -0.9986 & 1.9974 & -11.9986 & -2.0117 \\ -2.0040 & 0.0075 & -6.0040 & -0.9666 \end{bmatrix}, \\ A - A_3 &= \begin{bmatrix} 0.0034 & -0.0062 & 0.0034 & -0.0279 \\ -0.0061 & 0.0112 & -0.0060 & 0.0502 \\ -0.0014 & 0.0026 & -0.0014 & 0.0117 \\ 0.0040 & -0.0075 & 0.0040 & -0.0334 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rang 4:

$$\begin{aligned} A_4 &= \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \sigma_3 u_3 v_3^* + \sigma_4 u_4 v_4^* \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -12 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \\ A - A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$