5. Aufgabe

Sei $p_A(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ das charakteristische Polynom von A. Es gilt $a_0 = \det(A) \neq 0$, da $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$0_{n,n} \overset{C.H.}{=} p_A(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^j + \underbrace{a_0}_{\neq 0} I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{j=1}^{n} -\frac{a_j}{a_0} A^j = \sum_{j=1}^{n} -\frac{a_j}{a_0} A^{j-1} A \overset{\text{D. G.}}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} -\frac{a_j}{a_0} A^{j-1} \right) A$$

Also ist nach Definition der inversen Matrix

$$A^{-1} = \sum_{j=1}^{n} -\frac{a_j}{a_0} A^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} -\frac{a_{j+1}}{a_0} A^j = q(A)$$

wobei $q \in K_{\leq n-1}[t],\ q(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t^j$ mit $\alpha_j := -\frac{a_{j+1}}{a_0}$