5. Aufgabe

Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt die Aussage sofort aus Lemma 9.28. Da diese Antwort in einer Klausur nicht ausreichen würde hier trotzdem noch ein Beweis: $U \subseteq V$ gilt, da U ein Untervektorraum von V ist. Zu zeigen bleibt also nur noch $U \supseteq V$. Da $\dim U = n$ gibt es $\{u_i\}_{i=1}^n \subseteq U$, so dass $(u_i)_{i=1}^n$ eine Basis von U bildet. Angenommen $U \supseteq V$ gelte nicht. Dann sei $v \in V \setminus U$, also $v \notin U = \operatorname{Span}\{u_i\}_{i=1}^n$. Für $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ gilt:

1. Fall $\lambda_0 \neq 0$:

$$0_V = \lambda_0 v + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_0} u_i$$

   Widerspruch zu $v \notin \operatorname{Span}\{u_i\}_{i=1}^n$

2. Fall $\lambda_0 = 0$:

$$\underbrace{\lambda_0 v}_{=0} + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_V \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_V \xRightarrow{(u_i)_{i=1}^n \text{ l.u.}} \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

   Also ist $(v, u_1, \dots, u_n)$ linear unabhängig. Da $v, u_1, \dots, u_n \in V$ folgt $\dim(V) \geq n+1$. Widerspruch zu $\dim(V) = n$.

$\square$

Auf die Voraussetzung $\dim(V) < \infty$ kann *nicht* verzichtet werden. Sei z. B. $V = K[t]$ und $U = \operatorname{Span}\{t^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ Dann gilt $\dim(V) = \dim(U) = \infty$ (vgl. Beispiel 9.14) aber $U \neq V$. Angenommen doch. Es gilt $1 \cdot t^0 \in V$. Nach Annahme gibt es $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j t^{i_j} = 1 \cdot t^0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j t^{i_j} + 0 \cdot t^0 = 1 \cdot t^0 + \sum_{j=1}^n 0 \cdot t^{i_j}$$

Ein Koeffizientenvergleich bei t^0 ergibt $1 = 0$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass K ein Körper ist. Also ist $U \neq V$.