2.Aufgabe

Gegeben sei der $\mathbb{R}-$Vektorraum $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ der reellen Polynome höchstens dritten Grades. In V seien folgende Vektoren gegeben:
$v_1 = t - 1$ $v_2 = t^2 - 1$, $w_1 = t + 1$, $w_2 = t^2 + 1$, $w_3 = t^3$ und $w_4 = 3t$.
Untersuchen Sie, ob die Voraussetzungen des Basisergänzungssatzes für die Mengen $\{v_1, v_2\}$ und $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ erfüllt sind. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten $\{v_1, v_2\}$ mit Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zu einer Basis von V zu ergänzen.

Lösung:

Für den Basisergänzungssatz ist zu zeigen, dass $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist und
$\text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\} = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.

$\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig:
Sei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$.
Dann gilt $0 = \alpha_1(t-1) + \alpha_2(t^2-1) = (-\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$.
Mit Koeffizientenvergleich folgt damit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und somit $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig.

$\text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\} = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$:
Es gilt offensichtlich $\text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.
Noch zu zeigen: $\text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\} \supseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$
Sei $v \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ beliebig, d.h. es existieren $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{i=0}^{3} \mu_i t^i$.
Wir müssen $\lambda_0, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ finden, sodass das lineare Gleichungssystem $\lambda_0 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_1 + \lambda_3 w_2 + \lambda_4 w_3 + \lambda_5 w_4 = v$ minestens eine Lösung hat.
es gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda_0 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_1 + \lambda_3 w_2 + \lambda_4 w_3 + \lambda_5 w_4 = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_0(t-1) + \lambda_1(t^2-1) + \lambda_2(t+1) + \lambda_3(t^2-2) + \lambda_4 t^3 + \lambda_5 3t = v \\ \Leftrightarrow \quad & (-\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3) + (\lambda_0 + \lambda_2 + 3\lambda_5)t + (\lambda_1 + \lambda_3)t^2 + \lambda_4 t^3 = v \end{aligned}$$

Löse das LGS $Ax = b$ mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$ und $b = v$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & \mu_0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & \mu_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \overset{G_{12}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & \mu_0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 3 & \mu_0 + \mu_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{G_{23}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & \mu_0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 3 & \mu_0 + \mu_1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 3 & \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

Damit gilt $\text{Rang}A = \text{Rang}[A, v] = 4$. Das bedeutet es existiert mindestes eine Lösung, d.h. $v \in \text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\}$.
Da v beliebig gewählt war gilt $\mathbb{R}[t]_{\leq 3} \subseteq \text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ und somit die Gleichheit.

Nächste Aufgabe ist es $\{v_1, v_2\}$ mit Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zu einer Basis von V zu ergänzen.
Dafür brauchen wir vier linear unabhängige Vektoren

$\{v_1, v_2, w_i, w_j\}$ mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Offensichtlich brauchen wir auf jeden Fall den Vektor w_3, da dieser der einzige Vektor mit einer dritten potenz von t ist und es darf sich kein Vektor wiederholen, da wir sonst keine lineare Unabhängigkeit hätten. Damit suchen wir einen Vektor w_i, $i \in \{1, 2, 4\}$, sodass $\{v_1, v_2, w_3, w_i\}$ linear unabhängig sind.

Teste $i = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 w_1 \\ &= \lambda_1(t-1) + \lambda_2(t^2-1) + \lambda_3 t^3 + \lambda_4(t+1) \\ &= (-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4) + (\lambda_1 + \lambda_4)t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 \end{aligned}$$

Damit erhält man wieder ein LGS $Ax = 0$ mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$.
Es gilt $\det A = -2 \neq 0$ und damit hat das LGS genau eine Lösung, nämlich die triviale Lösung und daher sind die Vektoren linear unabhängig.

Teste $i = 2$: Auf gleiche Art und Weise erhält man
das LGS $Ax = 0$ mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$.
Es gilt $\det A = 1 \neq 0$ und damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Teste $i = 4$: Man erhält das LGS $Ax = 0$ mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$.
Es gilt $\det A = -3 \neq 0$ und somit sind auch diese Vektoren linear unabhänig.

Damit gibt es drei Möglichkeiten die Vektoren $\{v_1, v_2\}$ mit Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$zu einer Basis zu ergänzen und zwar bilden
$\{v_1, v_2, w_3, w_1\}$,$\{v_1, v_2, w_3, w_2\}$ und $\{v_1, v_2, w_3, w_4\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$.