Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. O. Holtz, Dr. Sadegh Jokar

SoSe 2011 / 2012
29. Juni 2012

Probe Scheinklausur
Lineare Algebra I

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich bin mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr. und Ergebnis) im Internet einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift: ....

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Zur Klausur sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Lösungsweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Es sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden.

Viel Erfolg!

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte (Multiple Choice)

Kreuzen Sie bei jeder Frage **Ja** oder **Nein** oder **nichts** an. Ein richtiges Kreuz ergibt **+1** Punkt, ein falsches Kreuz ergibt **-0.5** Punkt, keine Angabe zählt **0** Punkte, jedoch gibt es insgesamt nicht weniger als 0 Punkte.

Bitte geben Sie daher nur Antworten, bei denen Sie sicher sind!

(a) Sei $(G, +)$ eine Gruppe. Dann gilt für alle $a, b \in G$: $a + b = b + a$.
◯ ja ◯ nein

(b) Es sei K ein Körper. Die Menge $GL_n(K) = \{A \in K^{n,n} : A \text{ ist invertierbar}\}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation von Matrizen.
◯ ja ◯ nein

(c) Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ hat genau dann eine Lösung, wenn $b \in \operatorname{Span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ wobei a_i die Spalten von A sind.
◯ ja ◯ nein

(d) Es seien V ein Vektorraum und $M \subset V$ eine Familie von Vektoren, dann ist M genau dann linear unabhängig, wenn für alle $\vec{v} \in M$ gilt:
$\operatorname{Span}(M) \neq \operatorname{Span}(M \setminus \{\vec{v}\})$.
◯ ja ◯ nein

(e) Es seien ein Vektorraum V und Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ gegeben. Wenn $V = \operatorname{Span}(\vec{v}_1) \oplus \operatorname{Span}(\vec{v}_2) \oplus \operatorname{Span}(\vec{v}_3)$, dann ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis von V.
◯ ja ◯ nein

(f) Eine lineare Abbildung bildet linear unabhängige Familien von Vektoren wieder auf linear unabhängige Familien ab.
◯ ja ◯ nein

(g) Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n,n}$, dann gilt: $\det(A-B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$.
◯ ja ◯ nein

(h) Jeder Endomorphismus $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hat mindestens einen Eigenwert.
◯ ja ◯ nein

(i) Es seien $n \in \mathbb{N}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $A, B \in K^{n,n}$. Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und Eigenvektor von B zum Eigenwert μ, dann ist $\vec{v}$ Eigenvektor von AB zum Eigenwert ab.
◯ ja ◯ nein

(j) Sei f eine lineare Abbildung. Dann gilt: $\operatorname{Kern}(f) = \{\vec{0}\} \Rightarrow f$ ist surjektiv.
◯ ja ◯ nein

2. Aufgabe 10 Punkte (5+5)

Zeigen Sie:

(a) Sei $(G, \odot)$ eine Gruppe.
Falls für alle $a \in G$ gilt $a = a^{-1}$, dann ist G kommutativ.

(b) Sei $(G, \odot)$ eine Gruppe und $a \in G$ fest. Dann gilt:
$Z_a := \{g \in G \mid a \odot g = g \odot a\}$ ist eine Untergruppe von G.
(Z_a wird als Zentralisator von von a bezeichnet.)

3. Aufgabe 10 Punkte (5+5)

Gegeben sei die reelle 3×3 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie charakteristisches Polynom und Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

4. Aufgabe 10 Punkte (10)

Geben Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} x + \quad 2y + \quad z &= 2 \\ 2x + \quad 5y - \quad az &= 4 \\ x + (a+1)y - \quad 3z &= a. \end{aligned}$$

5. Aufgabe 10 Punkte (3+2+2+3)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch:

$$f(x, y, z, t) := (4x + y - 2z - 3t, 2x + y + z - 4t, 6x - 9z + 9t)$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix A von f bzgl. der kanonischen Basen an.

(b) Berechnen Sie Rang(A). Ist f surjektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Ist f injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe des Dimensionssatzes.

(d) Bestimmen Sie je eine Basis von Bild(f) und Kern(f).

Gesamtpunktzahl: 50 Punkte.