Das characteristische Polynom und der Satz von Cayley-Hamilton

Lineare Algebra I

Kapitel 8

11. Juni 2013

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 417, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: www.math.tu-berlin.de/~holtz Email: holtz@math.tu-berlin.de

Assistent: Agnieszka Miedlar, MA 462, Sprechstunden Dienstag 14-16

Tutoren: Clauß, Große, Reinke, Sieg

Anmeldung: über MOSES

Fragen? Studentische Studienfachberatung, MA 847

Telefon: (030) 314-21097 Email: studber@math.tu-berlin.de

Vorlesungen: VL am Dienstag, Mittwoch 10-12 im MA004
(ausnahmsweise am 10.04.13 im HE 101)

Zulassung zur Klausur: mit 50% Punkten für Hausaufgaben in jeder Semesterhälfte

Klausur: Mitte Juli

Begleitmatrix

Lemma

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, so ist $p(\lambda)$ charakteristisches Polynom von

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Begleitmatrix

Lemma

Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$, so ist $p(\lambda)$ charakteristisches Polynom von

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Definition

Die zu einem Polynom $p(\lambda)$ konstruierte Matrix aus diesem Lemma heißt Begleitmatrix zu $p(\lambda)$.

Begleitmatrix: Beweis

Wir verwenden vollständige Induktion:

I.A.: Für $n = 1$, d.h. $p(\lambda) = \lambda + a_1$, gilt mit $A_p = [-a_1]$

$$P_{A_p}(\lambda) = \det(\lambda I_1 - A_p) = \lambda + a_1 = p(\lambda).$$

I.V.: Für Polynome kleineren Grades als n sei die Behauptung bewiesen.

I.S.:

$$\det(\lambda I_n - A_p) = \det \begin{bmatrix} \lambda & & & a_n \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & a_2 \\ & & -1 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \underbrace{\det \begin{bmatrix} \lambda & & & a_{n-1} \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & a_2 \\ & & -1 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}}_{\text{nach I.V.}} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & -1 & \lambda & a_2 \\ & & & -1 & \lambda + a_1 \end{bmatrix}$$

Begleitmatrix: Beweis II

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \cdot (\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}) \\
&\quad +(-1)^{(n-1)+1} a_n \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \lambda \\ & & & -1 \end{bmatrix}}_{n-2} \\
&= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + (-1)^{2n-2} a_n \\
&= p(\lambda).
\end{aligned}
$$

Ähnliche Matrizen

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. A und B heißen ähnlich, falls es ein invertierbares $Z \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt, so dass

$$A = Z^{-1}BZ.$$

Ähnliche Matrizen

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. A und B heißen ähnlich, falls es ein invertierbares $Z \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt, so dass

$$A = Z^{-1} B Z.$$

Theorem

Wenn zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ ähnlich sind, so besitzen sie das gleiche charakteristische Polynom.

Ähnliche Matrizen

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. A und B heißen ähnlich, falls es ein invertierbares $Z \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt, so dass

$$A = Z^{-1}BZ.$$

Theorem

Wenn zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ ähnlich sind, so besitzen sie das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis: Sei $A = Z^{-1}BZ$, dann ist

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - Z^{-1}BZ) \\
&= \det\left(Z^{-1}(\lambda Z Z^{-1} - B)Z\right) \\
&= \det Z^{-1} \det(\lambda I - B) \det Z \\
&= \det\left(Z^{-1}Z\right) \det(\lambda I - B) \\
&= \det(\lambda I - B).
\end{aligned}$$

Satz von Cayley und Hamilton

Die Umkehrung von dem letzten Satz gilt nicht immer. Genauer werden wir das später sehen.

Satz von Cayley und Hamilton

Die Umkehrung von dem letzten Satz gilt nicht immer. Genauer werden wir das später sehen.

Ein fundamentaler Satz der Linearen Algebra ist der folgende Satz von Cayley und Hamilton.

Satz von Cayley und Hamilton

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit dem charakteristischen Polynom $P_A(\lambda)$. Dann erfüllt A die Gleichung

$$0 = P_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I_n \,.$$

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz klar. Für $n \geq 2$ betrachte die Matrix $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$. Alle Einträge sind Polynome vom Grad $\leq n-1$, es sind Minoren von $\lambda I - A$.

Satz von Cayley und Hamilton: Beweis

Wir können also $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$ schreiben als

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i \quad \text{mit } B_i \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

Satz von Cayley und Hamilton: Beweis

Wir können also $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$ schreiben als

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i \quad \text{mit } B_i \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

Nach dem Satz über die Adjungte folgt

$$(\lambda I - A)\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = (\lambda I - A)\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i\right) = P_A(\lambda) I.$$

Satz von Cayley und Hamilton: Beweis

Wir können also $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$ schreiben als

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i \quad \text{mit } B_i \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

Nach dem Satz über die Adjungte folgt

$$(\lambda I - A)\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = (\lambda I - A)\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i\right) = P_A(\lambda) I.$$

und damit folgt

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^{i+1}}_{\sum_{i=1}^{n} B_{i-1}\lambda^i} - \sum_{i=0}^{n-1} AB_i \lambda^i = \begin{bmatrix} P_A(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_A(\lambda) \end{bmatrix} = P_A(\lambda I)$$

$$\text{mit } P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Satz von Cayley und Hamilton: Beweis II

Der Koeffizientenvergleich (für gleiche Potenzen von λ) ergibt

$$
\begin{array}{lrl|rcl}
\lambda^n & : & A^n\cdot & B_{n-1} = I & \Longrightarrow & A^nB_{n-1} = A^n \\
\lambda^{n-1} & : & A^{n-1}\cdot & B_{n-2} - AB_{n-1} = a_1 I & \Longrightarrow & A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = a_1A^{n-1} \\
 & & \vdots & & & \\
\lambda^1 & : & A\cdot & B_0 - AB_1 = a_{n-1}I & \Longrightarrow & AB_0 - A^2B_1 = a_{n-1}A \\
\lambda^0 & : & & -AB_0 = a_nI & \Longrightarrow & -AB_0 = a_nI
\end{array}
$$

Satz von Cayley und Hamilton: Beweis II

Der Koeffizientenvergleich (für gleiche Potenzen von λ) ergibt

$$
\begin{array}{lr|ccccc}
\lambda^n: & A^n\cdot & B_{n-1} & = & I & \Longrightarrow & A^n B_{n-1} = A^n \\
\lambda^{n-1}: & A^{n-1}\cdot & B_{n-2} - AB_{n-1} & = & a_1 I & \Longrightarrow & A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1} = a_1 A^{n-1} \\
 & \vdots & & & & & \\
\lambda^1: & A\cdot & B_0 - AB_1 & = & a_{n-1} I & \Longrightarrow & AB_0 - A^2 B_1 = a_{n-1} A \\
\lambda^0: & & -AB_0 & = & a_n I & \Longrightarrow & -AB_0 = a_n I
\end{array}
$$

Addieren ergibt

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0.$$

Satz von Cayley und Hamilton: Beweis II

Der Koeffizientenvergleich (für gleiche Potenzen von λ) ergibt

$$\begin{array}{lr|rcl}
\lambda^n : & A^n\cdot & B_{n-1} & = I & \Longrightarrow & A^n B_{n-1} & = A^n \\
\lambda^{n-1} : & A^{n-1}\cdot & B_{n-2} - AB_{n-1} & = a_1 I & \Longrightarrow & A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1} & = a_1 A^{n-1} \\
 & & \vdots & & & & \\
\lambda^1 : & A\cdot & B_0 - AB_1 & = a_{n-1} I & \Longrightarrow & AB_0 - A^2 B_1 & = a_{n-1} A \\
\lambda^0 : & & -AB_0 & = a_n I & \Longrightarrow & -AB_0 & = a_n I
\end{array}$$

Addieren ergibt

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0.$$

Eigentlich hätten wir um diesen Beweis so durchzuführen erst einmal etwas detaillierter das Rechnen mit Variablen diskutieren müssen, denn der exakte mathematische Umgang mit Variablen ist mit großer Vorsicht zu betrachten. Dies würde aber einen großen formalen Aufwand erfordern und dafür ist hier nicht der richtige Platz.