

Numerische Mathematik I für Ing. – Übung 2 –

Theoretische Aufgaben: (Abgabe im jeweiligen Tutorium, 2.-4. Mai)

1. Aufgabe: (1+1+1 Punkte)

- (a) Gib die Iterationsvorschrift des Eulerverfahrens für das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = ay(t), \quad y(0) = y_0$$

mit konstanter Schrittweite h an.

- (b) Schreibe die Näherungslösung $u_i \approx y(t_i)$ in Abhängigkeit von y_0 .
(c) Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = y(1)$ für $h = 1/n$.

2. Aufgabe: (2+1+2+3+1 P.)

Betrachte das AWP

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)}, \quad t > 0, \quad x(0) = 0.$$

- (a) Berechne *alle* Lösungen des AWP!
(b) Welche Näherungslösung ergibt sich bei Anwendung des Eulerverfahrens?
(c) Berechne den globalen Fehler dieser Näherungslösung bezogen auf *jede* der exakten Lösungen!
(d) Zeige: Wenn für die Inkrementfunktion des Eulerverfahrens bei dieser Differentialgleichung

$$|\Phi(t, x_1, h, f) - \Phi(t, x_2, h, f)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \geq 0$$

gilt, dann ist $L = \infty$. (Tip: Binomische Formel).

- (e) Erfüllt die Inkrementfunktion des Eulerverfahrens für diese Differentialgleichung eine Lipschitzbedingung für $x \geq 0$?

3. Aufgabe: (1 P.)

Betrachte für festes $h > 0$ und beliebige t_0, y_0 die Verfahrensvorschrift:

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ \tilde{t}_i &= t_i + \frac{h}{2} \\ t_{i+1} &= t_i + h \\ \tilde{u}_i &= u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i) \\ u_{i+1} &= u_i + hf(\tilde{t}_i, \tilde{u}_i), \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Schreibe das Verfahren in der Form (2.7) des Vorlesungsskriptes. Es heißt *modifiziertes Eulerverfahren*.

4. Aufgabe: (3 P.)

Betrachte das DGL-System erster Ordnung, das sich aus Aufgabe 3.(a) des 1. Übungsblattes ergibt zusammen mit den Anfangsdaten $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$. Welche Verfahrensvorschriften erhält man bei der Anwendung des Eulerverfahrens und des modifizierten Eulerverfahrens?

Programmieraufgabe: (Abgabe per email bis zum 11. Mai) (16 P.)

- (a) Schreibe ein MATLAB-Programm `p02.m`, welches eine beliebige *skalare* Differentialgleichung

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

mit dem Eulerverfahren im Intervall $[t_0, t_e]$ mit beliebiger, aber fester Schrittweite h löst.

- (b) Dabei soll f in einer Funktion in einer Datei `f.m` realisiert werden. Verwende als Test Aufgabe 1(a) vom 1. Übungsblatt und $h = 0.2, 0.1, 0.01, 0.001, t_0 = 0.0, t_e = 1.0, y_0 = 2.0$.
(c) Stelle in einem Plot die exakte Lösung und alle vier Näherungslösungen für die oben angegebenen Schrittweiten dar. In einem weiteren Plot soll der Fehler $e_i(t) = y(t) - u_i(t)$ für die oben angegebenen Schrittweiten dargestellt werden.

Beide Files p02.m und f.m müssen **als zwei separate Anhänge/Attachments per email** an den **Betreuer des jeweiligen Tutoriums** geschickt werden. Betreuer sind

Thomas Slawig, email: nm1-001@pool.math.tu-berlin.de
Uwe Prüfert, email: nm1-011@pool.math.tu-berlin.de

Das Skript gibt es im Internet unter

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe01/Numerik_1_Ing/nfing1.ps

Vorrangzeiten im Unix-Pool MA241: Dienstags 12–16 Uhr und donnerstags 12–14 Uhr.