SS 2001
Prof. Volker Mehrmann
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Nachklausur Numerische Mathematik I für Ing.

BITTE DIESES FELD IN DRUCKSCHRIFT AUSFÜLLEN:

Name:		Vorname:	
Matrikel-Nr.:		Studiengang:	

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr. und Punktzahl) am schwarzen Brett vor dem MA 472 bin ich einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift: ....

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe	Zulassung	Note
Punkte										
max. Punkte	**4**	**6**	**8**	**7**	**4**	**6**	**5**	**40**		
Korrektor										

- **Zum Bestehen der Klausur sind 20 von 40 Punkten erforderlich.**
- **Als Hilfsmittel sind nur Stift und Papier zugelassen! Keine Taschenrechner! Ausdrücke, die nicht im Kopf berechnet werden können (z.B. $\sqrt{2}$ etc.) bitte unverändert stehen lassen!**
- **Bitte den Ausweis für Studierende und einen amtlichen Lichtbildausweis bereit halten!**
- **Aushang der Ergebnisse am schwarzen Brett vor dem MA 472 ab Freitag, 12.10.01, 12.00 Uhr. Dort wird auch der Einsicht- bzw. Rückgabetermin bekanntgegeben.**

KLAUSURAUFGABEN:

1. **Aufgabe:** (**4** (2+2) Punkte)

   Betrachte das Anfangswertproblem (AWP)

   $$y''(t) = t^2 y(t) y'(t) - y(t), \quad t \geq 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

   (a) Reduziere das AWP durch Hinzunahme zusätzlicher Variablen auf ein AWP für ein System erster Ordnung.

   (b) Berechne die erste Iterierte $\vec{u}_1$ des Eulerverfahrens für die Schrittweite $h = 1$.

2. **Aufgabe:** (**6** (2+2+2) P.)

   Das System

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.03 \end{pmatrix}$$

   soll mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden.

   (a) Berechne die *exakte* Lösung $x = (x_1, x_2)^T$.

   (b) Berechne die Lösung $\tilde{x}$, die sich bei dezimaler Gleitpunktrechnung ergibt, wenn für die Zahlendarstellung nur eine dreistellige Mantisse zur Verfügung steht. Nicht darstellbare Zahlen sollen *gerundet* werden.

   (c) Berechne den absoluten und den relativen Fehler von $\tilde{x}$ gegenüber der exakten Lösung in einer beliebigen

3. **Aufgabe:** (**8** (3+3+2) P.)
Es sei $f(x) = x^3 + 1$.

(a) Gib das Interpolationspolynom zweiten Grades zu f und den Stützstellen $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 2$ in der Form $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ an.

(b) Benutze die Gleichung

$$f(x) - p_n(x) \quad = \quad w(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \qquad w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \qquad \xi \in [x_0, x_n],$$

um den Betrag des absoluten Fehlers $|f(x) - p_2(x)|$ an der Stelle $x = 1$ abzuschätzen.

(c) Welches Interpolationspolynom ergibt sich, wenn man die Stützstelle $x_3 = 1$ hinzunimmt?

4. **Aufgabe:** (**7** (0.5+3.5+3) P.)
Gegeben seien die Wertepaare $\{(x_i, f_i)\}_{i=0,\ldots,2} = \{(-2, 0), (0, 1), (2, 0)\}$.

(a) Zeichne den interpolierenden linearen Spline.

(b) Es soll ein interpolierender kubischer Spline s mit **periodischen Randbedingungen** (d.h. $s'(x_0) = s'(x_2), s''(x_0) = s''(x_2)$) bestimmt werden. Mache dazu den Ansatz

$$s(x) \quad = \quad \begin{cases} s_0(x) \quad = \quad a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3, \quad x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) \quad = \quad a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, \quad x \in [x_1, x_2] \end{cases} \tag{1}$$

Gib **alle** Bedingungen für s_0 und s_1 an den Stützstellen x_0, x_1, x_2 an, durch die der Spline bestimmt ist.

(c) Welches lineare Gleichungssystem ergibt sich aus diesen Bedingungen für die unbekannten Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 0, 1)$ aus dem Ansatz (**??**). Das Gleichungssystem muss NICHT in Matrix-Vektorform geschrieben werden. Es soll NICHT gelöst werden!

5. **Aufgabe:** (**4** (3+1) P.)

(a) Berechne die Kondition von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$.

Hinweis: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) Skaliere A durch Links-Multiplikation mit einer Diagonalmatrix so, dass alle Zeilensummen gleich sind. Es genügt, die Diagonalmatrix anzugeben.

6. **Aufgabe:** (**6** P.)
Das Randwertproblem

$$-u''(x) + u'(x) + u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 1, u(1) = 1$$

soll mit einem Differenzenverfahren auf dem Gitter $x_i = ih, i = 0, \ldots, n$ für die Schrittweite $h = 1/n$ gelöst werden. Dabei soll die erste Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten erster Ordnung,

$$\delta_h u(x) \quad := \quad \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

und die zweite Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung,

$$D_{2h} u(x) \quad := \quad \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2},$$

ersetzt werden. Die Werte der Näherungslösung an den Gitterpunkten x_i werden mit $u_i, i = 0, \ldots, n$, bezeichnet. Schreibe die Matrix A und die rechte Seite b des sich ergebenden linearen Gleichungssystems $Au = b$ auf. Was sind die Unbekannten und welche Werte der Näherungslösung ergeben sich aus den Randbedingungen?

7. **Aufgabe:** (**5** (je 1) P.)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine vollbesetzte Matrix.

(a) Wieviele Gleitpunktoperationen (flops) benötigt man größenordnungsmäßig in Bezug auf n (d.h. $\mathcal{O}(n)$ oder $\mathcal{O}(n^2)$ etc.) für eine Matrix-Vektor-Multiplikation?

(b) Es liege eine LR-Zerlegung von A vor. In welchen Teilschritten wird damit die Lösung x des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ berechnet?

(c) Es liege eine QR-Zerlegung von A vor. In welchen Teilschritten wird damit die Lösung x des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ berechnet?

(d) In welchem Fall ist es besonders sinnvoll, eine QR-Zerlegung für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu verwenden?