TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / C. Bohle Abgabe: 29.4.2002

1. Übung Differentialgeometrie II

(Mannigfaltigkeiten)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Auf $\mathbb{R}$ sind zwei differenzierbare Strukturen $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, f)\}$ mit $f(x) = x^3$ definiert. Zeigen Sie, daß diese Strukturen nicht gleich aber diffeomorph sind.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Der Würfel $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \max|x_i| = 1\}$ ist offensichtlich keine glatte Untermannigfaltigkeit. Wie kann man ihn trotzdem zu einer glatten Mannigfaltigkeit machen?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Zeige Sie, daß die folgenden Mannigfaltigkeiten diffeomorph sind.

i) $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

ii) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

iii) Rotationstorus in $\mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Der reelle *projektive Raum* ist $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ mit $x \sim y$ wenn $x = \lambda y$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Äquivalenzklasse von $x = (x_0, ..., x_n)$ wird mit $[x] = [x_0 : ... : x_n]$ bezeichnet. Zeigen Sie:

i) $\mathbb{RP}^n$ mit dem Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i = 0, ..., n\}$, $U_i = \{[x] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ und
$$\psi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n \quad [x] \mapsto (x_0/x_i, ..., \hat{x}_i, ..., x_n/x_i)$$
ist eine Mannigfaltigkeit.

ii) Die Abbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ mit $x \mapsto [x]$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

iii) $\mathbb{RP}^1$ ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^1$.

iv)* $\mathbb{CP}^1$ ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^2$. (Die Definition des komplex projektiven Raumes ist analog zu der des reellen.)