TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / C. Bohle Abgabe: 17.6.2002

7. Übung Differentialgeometrie II

(Kovariante Ableitung)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Die Menge der kovarianten Ableitungen auf TM ist ein affiner Raum. (Zeigen Sie, daß die Differenz zweier kovarianter Ableitungen eine 1–Form mit Werten in den Endomorphismen von TM ist, und daß man umgekehrt eine kovariante Ableitung erhält, wenn man zu einer kovarianten Ableitung eine 1–Form mit Werten in den Endomorphismen von TM addiert.)

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f\colon (M,g) \to (N,h)$ eine Isometrie zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, daß für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt

$$df(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{df(X)} df(Y)$$

wobei ∇ und $\tilde{\nabla}$ die Levi–Civita Zusammenhänge von (M,g) und (N,h) sind.

3. Aufgabe (2 Punkte)

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es seien zwei Karten $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ und $(U, \psi = (y_1, ..., y_n))$ auf der gleichen Menge U definiert.

i) Sei $g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij} dy_i dy_j$. Man zeige:

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l} g_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_j}.$$

ii) Sei $X \in \Gamma(TM)$ und $X|_U = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \tilde{X}_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Man zeige:

$$\tilde{X}_i = \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} X_k.$$

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n))$ eine Karte und $g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$. Die Matrix (g^{ik}) bezeichne die inverse Matrix zu (g_{ik}).

i) Der *Gradient* von $f \in C^\infty(M)$ ist definiert über die Gleichung $g(\operatorname{grad} f, X) = df(X)$ für alle $X \in TM$. Zeigen Sie, daß in der Karte (U, φ) gilt:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{ik} g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ii) Die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k des Levi–Civita Zusammenhangs ∇ beschreiben, wie ∇ auf die Gaussbasis zu einer Karte wirkt. Die Christoffelsymbole zu (U, φ) sind definiert über $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Man zeige, daß für alle i, j, k folgende Gleichungen gelten:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}).$$

iii) Berechnen Sie den Gradienten und die Christoffelsymbole des Euklidischen Raumes bezüglich Kartesischer und sphärischer Koordinaten.