Sommersemester 2002
Prof. Rolf-Dieter Grigorieff
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

6. Übungsblatt – Numerische Mathematik I für Ing.

`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe02/Num_1_Ing`

- Aufgaben für die Tutorien in der Woche vom 20.-24.5.:

  Betrachte für beliebige, aber feste Parameter λ das sogenannte *Eigenwertproblem*

$$u'' + \lambda u = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

  1. Bringe das Problem in die Form eines Sturm-Liouville-Problems (9.14)! Was sind $p, q, r, a, b, \alpha, \beta$? Sind die Voraussetzungen (9.15) erfüllt? Was lässt sich also über Eindeutigkeit der Lösung sagen?
  2. Bilde durch partielle Integration die *schwache Formulierung* der Gleichung, vgl. (9.19).
  3. Welches Gleichungssystem ergibt sich mit $\rho_i (i = 1, \dots, n)$ als Ansatz- und Testfunktionen?
  4. Wähle für das Intervall $[0,1]$ die Unterterteilung $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$. Gib die Formel für eine Funktion $\rho_1(x)$ an, die aussieht wie auf Seite 109 oben im Skript: Sie soll am Gitterpunkt x_1 den Wert 1 haben, an allen anderen Gitterpunkten den Wert 0. Zwischen den Gitterpunkten soll sie linear sein.
  5. Wie sieht eine solche Funktion für allgemeines i und beliebiges h aus?
  6. Berechne die Integrale, die sich in dem Term (ρ_i, ρ_j) ergeben. Stelle die zugehörige Matrix auf. Diese Matrix heisst *Massematrix*.

- Übungsaufgaben: (Abgabe im Tutorium in der Woche vom 27.-31.5.02)

  1. (6 P.)
     Wenn es in (1) zu λ eine Lösung $u \neq 0$ gibt, so heisst λ *Eigenwert* und u *Eigenfunktion*. Berechne analytisch alle Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenfunktionen u_i von (1).
  2. (3 P.)
     Wie sieht die Ableitung der in Tutoriumsaufgabe 5 berechneten Funktion ρ_i für beliebiges h aus?
  3. (6 P.)
     In Tutoriumsaufgabe 3 tauchte noch eine zweite Matrix auf, die die Integrale (ρ_i', ρ_j') enthält. Berechne sie für beliebiges h und stelle die Matrix auf. Diese Matrix heisst *Steifigkeitsmatrix*.
  4. (2 P.)
     Wie sieht im allgemeinen Fall (h beliebig) das entstehende lineare Gleichungssystem aus?
  5. (Programmieraufgabe - Vorführen in der Woche vom 27.-31.5.02)
     Eine Gleichung der Form

$$(A - \lambda B)x = 0 \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n$$

     bezeichnet man im Fall $B \neq I$ als *verallgemeinertes Eigenwertproblem*. Dabei heißt λ Eigenwert und ein zugehöriges x Eigenvektor.

     – In Matlab berechnet man λ und x zusammen mit dem Befehl `[X,L]=eig(A,B)`. Dabei stehen in X spaltenweise die Eigenvektoren und in der Matrix(!!) L die Eigenwerte λ_k auf der Diagonalen.
     – In Scilab berechnet man λ und x mit `[a,e,X]=gspec(A,B);L=a./e;`. Hier ist L ein *Vektor* mit den Eigenwerten.

     Löse das Eigenwertproblem (1) mit der auf diesem Übungsblatt durchgeführten Diskretisierung für eine Unterteilung $x_i = ih, i = 0, \dots, 64$ des Intervalls $[0,1]$. Auf der Homepage gibt es ein Programm `p6.m` bzw. `p6.sci`, das für ein frei wählbares k

     – den $k-ten$ (der Größe nach geordnet) approximierten und den exakten Eigenwert ausgibt
     – und den zugehörigen approximierten und den exakten Eigenvektor in einem Bild plottet. Beachte, dass Eigenvektoren allgemein nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt sind.

     In den freien Zeilen von `p6.m` bzw. `p6.sci` sind nur noch die Steifigkeits- und Massematrix zu definieren, der Eigenwertlöser aufzurufen, und die Zahl k anzugeben.