Sommersemester 2002
Prof. Rolf-Dieter Grigorieff
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

8. Übungsblatt – Numerische Mathematik I für Ing.

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe02/Num_1_Ing

- Aufgaben für die Tutorien in der Woche vom 3.-7.6.:

1. Berechne die Kondition der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$
bezüglich der Normen $\|\cdot\|_\infty$ (Zeilensummen-), $\|\cdot\|_1$ (Spaltensummen-) und $\|\cdot\|_2$ (Spektralnorm). Wie berechnet man die Kondition einer Matrix in Matlab/Scilab?

2. (a) Berechne die LR-Zerlegung (ohne Zeilenvertauschungen) der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$
Gib die Matrizen L und R explizit an.
(b) Löse mit Hilfe der LR-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2, 8, 10)^T$. Was sind die einzelnen Teilschritte?
(c) Wie geht man vor, wenn man noch einen zweiten Vektor b gegeben hat?
(d) Was ist der Vorteil gegenüber dem zweimaligen Durchführen des Gaußalgorithmus?

3. (a) Wann ist eine Matrix positiv definit?
(b) Zeige durch Zählen der einzelnen Operationen in Alg. 10 der VL, dass die Anzahl der benötigten Rechenoperationen für die Cholesky-Zerlegung einer positiv definiten Matrix $n^3/3$ ist. Dabei zählen Additionen, Substraktionen, Multiplikationen und Divisionen jeweils als eine Rechenoperation.

4. Wenn man anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ das System
$$D_1^{-1} A D_2 y = D_1^{-1} b$$
löst, spricht man von einer Skalierung (vgl. VL Abschnitt 7.7). Dabei wählt man D_1, D_2 als Diagonalmatrizen. Wie erhält man aus y die Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems?

- Übungsaufgaben: (Abgabe im Tutorium in der Woche vom 10.-14.6.02)

1. (8 P.)
Zeige, dass die Anzahl der benötigten Rechenoperationen bei der Lösung eines gestaffelten linearen Gleichungssystem (d.h. ein Gleichungssystem mit Dreiecksmatrix, vgl. Alg. 3 oder4 der VL) $n^2 + \mathcal{O}(n)$ ist. **Dabei zählen Additionen, Substraktionen, Multiplikationen und Divisionen jeweils als eine Rechenoperation.**
Benutze die Formel (vgl. Analysis/HM 1): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$.

2. (12 P.)
Bei Anwendungen hat man es oft mit sehr großen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, also mit großen Werten von n zutun.
(a) Berechne Determinante und Kondition (bzgl. einer beliebigen Norm) der Matrix $D = diag(0.1, \ldots, 0.1) \in \mathbb{R}^{1000,1000}$, d.h. eine Diagonalmatrix mit 0.1 auf der Diagonalen, sonst Nullen.
(b) Berechne Determinante und Kondition (bzgl. einer beliebigen Norm) der $(n \times n)$-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Hinweis: Es gilt } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^0 & 2^1 & \ldots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 2^0 & \ldots & 2^{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 2^0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und (Summenformel für die geometrische Reihe): $\sum_{j=0}^{k} x^j = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Wie verhalten sich Determinante und Kondition für sehr große Werte von n, also für $n \to \infty$?

(c) Eine Matrix A mit $\det A = 0$ ist singulär. Ist eine Matrix mit sehr kleiner positiver Determinante also schlecht konditioniert? Kann man von dem Wert der Determinante auf die Kondition schließen?

3. (Programmieraufgabe - Vorführen in der Woche vom 10.-14.6.02)
Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 100 & 10000 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne mit Matlab/Scilab ihre LR-Zerlegung mit $[\mathtt{L}, \mathtt{R}] = \mathtt{lu}(\mathtt{A})$.

(b) Löse **mit dieser LR-Zerlegung** die Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $b = (1,1,1)^T$ und $b = (2,0,3)^T$.

(c) Berechne mit Matlab/Scilab die Kondition von A bzgl. der 1-,2- und ∞-Norm. Zu Scilab gibt es auf der Homepage eine Datei `mcond.sci`, die alle drei Konditionen zur Verfügung stellt (Scilab hat standardmäßig nur die Kondition bzgl. der 2-Norm).

(d) Skaliere die Matrix durch Linksmultiplikation mit einer Diagonalmatrix D, so dass in der skalierten Matrix alle Zeilen gleiche Betragssumme haben. Berechne die Kondition von DA bzgl. der 2-Norm und vergleiche mit (c).