Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung - Definition und Beispiele partieller Differentialgleichungen

1.1 Grundbegriffe

Wir wiederholen zunächst den Begriff einer *gewöhnlichen Differentialgleichung*. Gesucht wird hier eine Funktion $u = u(x)$ einer reellen Veränderlichen $x \in (a, b)$, so dass die Gleichung

$$F(x, u(x), u'(x), ..., u^{(m)}(x)) = 0, \quad x \in (a, b)$$

erfüllt ist. Sie wird *gewöhnlich Differentialgleichung m-ter Ordnung* genannt, wenn $m \geq 1$ gilt und $u^{(m)}$ wirklich auftritt, also die Gleichung nach $u^{(m)}$ umgestellt werden kann. Gegeben ist eine Funktion $F = F(x, y_0, ..., y_m) : (a, b) \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ sowie das Gebiet $G = (a, b)$, in welchem der betrachtete Vorgang abläuft.

Durch die Differentialgleichung selbst ist die Lösung u nicht eindeutig bestimmt, deshalb braucht man zusätzliche Bedingungen, etwa *Anfangs- und Randbedingungen*.

Beispiel

$$u'(x) \;=\; u^2, \qquad x > 0$$

$$u(0) = 1$$

Mit der Methode der Trennung der Veränderlichen erhält man die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad 0 \leq x < 1.$$

Dieses so harmlos aussehende Beispiel zeigt, dass die Existenz von Lösungen nicht trivial und gegebenenfalls nur lokal gesichert ist. Hier hat u eine Singularität bei $x = 1$ ("blow up in finite time"). Im Beispiel war $F = F(x, y_0, y_1) = y_1 - y_0^2$, $G = (0, \infty)$.

Bei *partiellen* Differentialgleichungen ist eine Funktion u von *mehreren Veränderlichen* gesucht,

$$u = u(x_1, ..., x_n), \quad u : G \to \mathbb{R}, \quad G \subset \mathbb{R}^n.$$

Die Variablen x_1,...,x_n fassen wir zu einem Vektor x zusammen, $x \in G$. Anstelle der Ableitungen $u', ..., u^{(m)}$ treten nun partielle Ableitungen auf, z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}$$

usw. Offensichtlich steigt damit der Schreibaufwand, und wir benötigen eine elegante Notation.

<u>Definition:</u> (Verwendung von Multiindizes)

$$D_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} D_j u &= \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ D_j^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ D_i D_j u &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \end{aligned}$$

<u>Multiindex:</u> $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Bedeutung: α_i gibt an, wie oft nach x_i partiell abgeleitet wird.

Betrag von α: $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$
entspricht der Differentiationsordnung

Differentialoperator D_x^α: das x steht hier für die Differentiation nach x

$D_x^\alpha = (D_1^{\alpha_1}, ..., D_n^{\alpha_n})$ der letzte Eintrag bedeutet z.B., dass α_n-mal nach x_n abgeleitet wird.

Beispiel: $u = u(x_1, ..x_5)$, $n = 5$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} = D_1 D_2^2 u = D_x^\alpha u$$

mit $\alpha = (1, 2, 0, 0, 0)$ und $|\alpha| = 3$.

Nun können wir den Begriff der partiellen Differentialgleichung einführen. Dazu brauchen wir ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $F : G \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$,

$$F = F(x, y_0, y_1, ..., y_k).$$

Definition: Eine Gleichung der Form

$$F(x, u(x), D_x^{\alpha^1} u(x), ..., D_x^{\alpha^k} u(x)) = 0, \quad x \in G,$$

heißt *partielle Differentialgleichung in n reellen Veränderlichen*. Dabei sind $\alpha^1, ..., \alpha^n$ Multiindizes, also jeweils Vektoren der Dimension n. Gilt $|\alpha^i| \leq m$, $i = 1..k$, und existiert ein α^j mit $|\alpha^j| = m$, so heißt die Gleichung von m-ter Ordnung. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass nach $D_x^{a^j} u$ umgestellt werden kann, diese Ableitung also wirklich auftritt.

Beispiel: $n = 2$, $u = u(x_1, x_2)$
Wir schreiben vorteilhafter $x := x_1$, $y := x_2$.

$$x(D_x u)^2 + D_x D_y^2 u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$$

ist eine partielle Differentialgleichung im Einheitskreis.

$$G = \{(x, y) |\, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$F = x y_1^2 + y_2 \quad \alpha_1 = (1, 0), \quad \alpha_2 = (1, 2)$$

Ordnung: $m = 3$

Analog gibt es Systeme von partiellen Differentialgleichungen. In diesem Fall sind F und u Vektoren, $F : G \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^M$, $u : G \to \mathbb{R}^N$.

Definition: (linear/semilinear/quasilinear/nichtlinear)

1. Eine partielle Differentialgleichung der Form
$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f(x)$$
mit gegebenen Funktionen a_α und f heißt *linear*.

2. Hat eine partielle Differentialgleichung die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D_x^\alpha u + \tilde{F}(x, D_x^{\alpha^1} u, ..., D_x^{\alpha^l} u) = 0,$$
wobei alle in $\tilde{F}$ stehenden Ableitungen die Ordnung kleiner als k besitzen, so heißt sie *semilinear*. ("Hauptteil ist linear.")

3. Hat sie die Gestalt
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, D_x^{\beta^1} u, ..., D_x^{\beta^p} u) D_x^\alpha u + \tilde{F}(x, D_x^{\alpha^1} u, ..., D_x^{\alpha^l} u) = 0,$$
wobei $|\alpha^1|, ..., |\alpha^l|, |\beta^1|, .., |\beta^p| \leq k-1$ gilt, so heißt sie *quasilinear* (höchste Ableitungen kommen nur linear vor).

4. Trifft keiner der vorigen Fälle zu, so heißt die PDE *nichtlinear*.

Vereinfachung der Schreibweise: $D^\alpha := D_x^\alpha$
PDE steht für partielle Differentialgleichung (partial differential equation).

Beispiele: 1. $\nabla u(x) = f(x) \qquad f : G \to \mathbb{R}^n$ gegeben
Lineares System 1. Ordung, ausgeschrieben

$$\begin{aligned} D_1 u &= f_1 \\ ... &= ... \\ D_n u &= f_n \end{aligned}$$

2. $x_1^3 D_2 D_3 u + D_1 u = 0$
Homogene lineare PDE 2. Ordnung. Anders aufgeschrieben:

$$a_\alpha D^\alpha u + D^\beta u = 0$$

mit $\alpha = (0,1,1)$, $a_\alpha = x_1^3$, $\beta = (1,0,0)$.

3. $x_1^3 D_2 D_3 u + (D_1 u)^2 = 0$
Semilineare PDE 2. Ordnung

4. $x_1^3 (D_2 D_3 u)(D_1 u)^2 = 0$
Quasilineare PDE 2. Ordnung

5. $(D_1 u)^2 + (D_2 u)^2 = 0$
Nichtlineare PDE 1. Ordnung

Um nicht in Formalitäten zu ersticken, wollen wir einige einfache Beispiele lösen bzw. diskutieren.

6. $u = u(x,y)$
Gegeben sei die Gleichung $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, kurz

$$u_x(x,y) = 0,$$

womit wir noch eine alternative Bezeichnungsweise für partielle Differentialgleichungen ins Spiel gebracht haben ...
<u>Lösung:</u> Alle Funktionen der Form $u = u(y)$.

7. $u = u(x,y)$
Gleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, kurz

$$u_{xy}(x,y) = 0 \tag{1.1}$$

<u>Lösung:</u> Wir formulieren um zu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$

und setzen $v := \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$. Für v ergibt sich

$$v_x(x,y) = 0,$$

also nach 6. die Zwischenlösung $v = v(y)$. Somit folgt

$$u_y(x, y) = v(y)$$

und daraus

$$u(x, y) = \int v(y)\, dy = f(y) + c$$

Wir müssen beachten, dass c von x abhängen darf. Also erhalten wir die Lösung

$$u(x, y) = g(x) + f(y) \tag{1.2}$$

Jede Funktion dieser Bauart mit differenzierbaren Funktionen g und f löst unsere Gleichung.

8. $u = u(x, y)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

Aus $(\nabla u, \nabla u) = 0$ folgt $\nabla u = 0$ also $u(x, y) \equiv c$.

Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind durch die Gleichung immer bis auf Konstanten bestimmt. Diese müssen dann durch Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt werden. In den Beispielen 6. und 7. haben wir gesehen, dass Lösungen partieller Differentialgleichungen noch frei wählbare Funktionen beinhalten. Aber auch diese können bei geeigneten Anfangs- oder Randbedingungen ermittelt werden.

1.2 Die Wärmeleitgleichung

Diese Gleichung beschreibt die Wärmeausbreitung in Körpern, modelliert aber auch die Diffusion von Substanzen in gegebenen Bereichen. Sie wird deshalb oft auch als *Diffusionsgleichung* bezeichnet.

Das betrachtete *Ortsgebiet* sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Außerdem spielt die *Zeit* $t \geq 0$ noch eine Rolle. Gesucht ist

$$u = u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t),$$

die Temperatur im Ortspunkt $x \in \Omega$ zur Zeit t.

Physikalische Grundlage für die Wärmeausbreitung in Ω ist das *Fouriersche Gesetz*. Wir betrachten hier die Änderung der inneren Energie $Q_2 - Q_1$. Diese Änderung ist gleich dem Wärmefluß über die Oberfläche S in dieser Zeit. Daher gilt

$$Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \nabla u \cdot d\vec{S} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt.$$

Dabei ist ν die Normale auf S. Der Wärmestrom ist also proportional zum Temperaturgradienten. Diese Formel gilt für *isotrope* Körper. Das bedeutet, dass die Wärmeleitfähigkeit unabhängig von der Ortsrichtung ist. Die Größe $k = k(x)$ heißt Wärmeleitzahl.

Herleitung der Wärmeleitgleichung

Wir betrachten ein kleines Teilgebiet $D \subset \Omega$ im Zeitraum $[t_1, t_2]$. Dazu verwenden wir die Größen:

$c = c(x)$	spezifische Wärme
$\varrho = \varrho(x)$	Dichte
ν	äußere Normale an $S = \partial D$

Zunächst gilt für die innere Energie die Formel

$$Q(t) = \int_D c\varrho u(x,t) dx$$

und daher ergibt sich

$$\int_D c\varrho (u(x,t_2) - u(x,t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \frac{\partial u}{\partial \nu} dS dt.$$

Wir nehmen an, daß die Anwendung des Gaußschen Integralsatz erlaubt ist und wenden diesen für das Vektorfeld $k\nabla u$ an

$$\int_D c\varrho (u(x,t_2) - u(x,t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \text{div } (k \nabla u) dx dt.$$

Äquivalent dazu ist die Formulierung

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D c\varrho \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \text{div } (k \nabla u) dx dt,$$

woraus wir auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D (c\varrho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div } (k \nabla u)) dx dt = 0$$

schließen. Aus der Beliebigkeit von t_1, t_2 und D folgt

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div } (k\text{grad } u) \qquad t > 0,\ x \in \Omega$$

die *Wärmeleitgleichung.* Ausgeschrieben:

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial u}{\partial x_i}).$$

Ist Ω homogen, d.h. c, ϱ, k sind von x unabhängig, dann gilt

$$\frac{c\varrho}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \qquad (\Delta u = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}).$$

Wir transformieren $t = \frac{c\varrho}{k}t'$ und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \Delta u$$

als Grundform der Wärmeleitgleichung. Bei der Diffusionsgleichung steht u für die Konzentration und k für den Diffusionskoeffizient.

1.3 Die Schwingunsgleichung

Mit der Schwingungsgleichung werden Schwingungen von gewissen Medien bzw. die Ausbreitung von Wellen beschrieben, daher auch der Name "Wellengleichung". Wir leiten die Gleichung für den Fall einer in der vertikalen Ebene schwingenden Saite her (Gitarre als Hintergrund).

Saite: "Elastisch gespannter Faden, der Biegungen keinen Widerstand entgegensetzt."

Wir stellen uns einen Schnappschuss der Saite vor

- Saite eingespannt zwischen $x = 0$ und $x = l$
- Ortspunkt $x \in [0, l]$

- Zeit $t \geq 0$
- $u(x,t)$: Auslenkung der Saite im Punkt x zur Zeit t

Herleitung der Schwingungsgleichung

Vereinfachende Näherung: Größen höherer Ordnung von $\tan\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, wie zum Beispiel $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, werden vernachlässigt. Wegen fehlendem Biegewiderstand wirkt die Kraft auf jeden Punkt der Saite immer *tangential.* Wir betrachten nun die Situation für ein kleines Saitenstück der Länge dx. Die Länge des ausgelenkten Stücks beträgt nach unserer Näherungsannahme

$$l = \int_x^{x+dx} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx \int_x^{x+dx} dx = dx.$$

Aus dem Hookeschen Gesetz kann man ableiten:

$$|T(x,t)| \equiv T_0.$$

Wir denken uns nun die auf das Saitenstück vertikal wirkende Kraft in einem Punkt konzentriert und erhalten nach dem 2. Newtonschen Gesetz ($F = m\cdot a$)

$$T_0 \sin\alpha_2 - T_0 \sin\alpha_1 + F(x,t)dx = \varrho(x)dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Dabei sind ϱ die Massendichte und F die Kraftdichte äußerer vertikal angreifender Kräfte. In die Massenberechnung ging bereits die Formel $l \approx dx$ ein. Aus unserer Näherungsannahme folgt

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

woraus wir auf

$$\varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0\frac{1}{dx}\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + F$$

schließen. Wir nehmen nun u hinreichend glatt an und folgern aus dem Mittelwertsatz

$$\varrho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0\frac{1}{dx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x+\vartheta dx,t)dx + F.$$

Der Grenzübergang $dx \to 0$ ergibt

$$\varrho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F.$$

Ist ϱ konstant, so erhalten wir mit $a = \sqrt{T_0/\varrho}$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

die (örtlich) *eindimensionale Schwingungsgleichung*. Analog stellt man die Gleichung in höheren Ortsdimensionen auf:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f.$$

Die *zweidimensionale Schwingungsgleichung* beschreibt das Schwingunsverhalten einer Membran. Die *dreidimensionale Schwingunsgleichung*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f$$

beschreibt Phänomene wie Schallausbreitung und elektromagnetische Wellen. Alle Dimensionen können einheitlich durch

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f$$

berücksichtigt werden, wobei wie bei der Wärmeleitgleichung der Laplace-Operator Δ nur in Ortsrichtung wirkt. In sehr vielen praktischen Anwendungen kann der Term f der äußeren Kräfte vernachlässigt werden.

1.4 Die Laplace-Gleichung

Betrachten wir als Beispiel eine Kugel, die fest im All schwebt und permanent auf einer Seite durch die Sonne beschienen wird. Für $t \to \infty$ stellt sich ein stationärer Temperaturzustand $u = u(x)$ ein, der nicht mehr von t abhängt. Die Wärmeleitgleichung geht über in die

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

Laplace-Gleichung. Dies ist eine homogene Gleichung. Bauen wir eine inhomogene rechte Seite f ein, so entsteht die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega.$$

Interpretiert man die rechte Seite als Ladungsverteilung, so beschreibt die Poisson-Gleichung das zugehörige elektrische Feld.

Wärmeleitgleichung, Schwingunsgleichung, Laplace- und Poisson-Gleichung sind lineare PDEs zweiter Ordnung. Vom Typ her sind sie gänzlich verschieden, nämlich parabolisch, hyperbolisch bzw. elliptisch (die letzten beiden) und haben entsprechend verschiedenes Lösungsverhalten. Wie man auf die Typeinteilung kommt, das verrät das nächste Kapitel.