TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002

Institut für Mathematik

Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Partielle Differentialgleichungen - 1. Übung

1. (Vorrechenaufgabe) Berechnen Sie sämtliche partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach x und y:

   a) $u = \phi(\xi, \eta), \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y$

   b) $u = \phi(\xi, \eta), \quad \xi = x^2 + y^2, \quad \eta = xy$

   c) $z = f(u), \qquad u = \phi(x, y)$

2. (Vorrechenaufgabe) Zeigen Sie:

   a) $f(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4ta^2}}$ (a const.) ist eine Lösung von

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

   b) $f(x,y) = \phi(y + ax) + \psi(y - ax)$ (a const., $\phi(.), \psi(.) \in C^2$) ist Lösung von

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

3. (Vorrechenaufgabe) Zeigen Sie,daß $\triangle u = 0$ folgende Lösungen besitzt:

   a) für $n = 2 :\qquad u = \ln r,$

   b) für $n \geq 3 :\qquad u = r^{2-n}\ , \qquad r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$

4. Zeigen Sie für harmonische Funktionen u ($\triangle u = 0, u \in C^\infty$) (n=2):

   a) $f(z) = \partial u/\partial x - i\partial u/\partial y$ ist holomorph (komplex differenzierbar).

   b) f(z)=u(x,y)+iv(x,y) holomorph $\Rightarrow$ u,v harmonisch.

   c) $v = \partial u/\partial x - \partial u/\partial y$ ist harmonisch.

5. Lösen Sie (mittels Analogien zu gew. DGLn.):

   a) $u_{yy} + u_y + x = 0;$

   b) $u_{xx} + y = 1/x;$

   c) $z_{xy} + yz_x - xz_y = 0$ (nur partikuläre Lösungen gesucht; verwenden Sie dabei den Ansatz $z(x,y) = z_1(x)z_2(y)$).