

Vektoranalysis

Partielle Differentialgleichungen - 2. Übung

1. (Vorrechenaufgabe) Zeigen Sie, daß $\vec{v} = (z^2 + y^2, 2xy, 2xz)$ ein Potentialfeld ist und berechnen Sie das Potential U mit $U(1, 1, 1) = 0!$

2. (Vorrechenaufgabe) Für welches λ ist

$\vec{v} = (x^2 + 5\lambda y + 3yz, 5x + 3\lambda xz - 2, 2xy + \lambda xy - 4z)$ Gradient eines Skalarfeldes U ?

3. Berechnen Sie !

- | | | | |
|-------------------------------------|---|--|--|
| a) ∇r | b) $\nabla \frac{1}{r}$ | c) $\nabla f(r)$ | d) $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{r})$ |
| e) $\nabla \cdot \vec{r}$ | f) $\nabla \times \vec{r}$ | g) $(\vec{a} \cdot \nabla)\vec{r}$ | h) $(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{a}$ |
| i) $\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ | j) $\nabla \cdot (r^n(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r})$ | k) $\nabla \cdot ((\vec{a} \times \vec{r})r^n)$ | l) $\nabla(r^2(\vec{a} \cdot \vec{r}) \ln r)$ |
| m) $\nabla \times (\vec{r}r^n)$ | n) $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r})$ | o) $\nabla \times (\vec{r}r^n(\vec{a} \cdot \vec{r}))$ | p) $\text{div grad } \frac{1}{r}$ |
| q) $\nabla \cdot (\nabla \ln r)$ | r) $\nabla(\nabla \cdot \vec{r})$ | s) $\nabla(\nabla \cdot (a \times r^n \vec{r}))$ | t) $\nabla \times (\nabla \times r^2 \vec{a})$ |

4. Beweisen Sie a) $\text{rot grad } U = \nabla \times \nabla U = \vec{0}$ b) $\text{div rot } \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0!$

5. (Vorrechenaufgabe) Überführen Sie die folgenden Gleichungen in Kurz- bzw. Langschreibweise:

- a) $u_{xyz} + u_{xxy} + u_{zyz} = 0,$
 b) $D_x^{(0,2,2)}u + D_x^{(3,0,0)}u + D_x^{(1,2,1)}u = 0.$

6. (Vorrechenaufgabe) Sind folgende PDEs linear, semilinear, quasilinear oder nichtlinear ?

- a) $(u_{xyz})^2 + u_{xxy} + u \cdot u_{zyz} = 0,$
 b) $u_{xyz} + x^3 u_{xx} + yz u_{xz} = 0.$
 c) $u_x^3 + u_y + u_z^2 = 0,$
 d) $uu_{xx} + u_{yy} = 0.$