TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002

Institut für Mathematik

Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Elliptische DGL – Anwendungen

Partielle Differentialgleichungen - 6. Übung

1. Lösen Sie folgende Anfangs– und Randwertaufgaben zur Wellengleichung mit Hilfe der Fouriermethode! (Fortsetzung vom letzten Blatt)

a) $u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = x + t, \qquad x \in (0,\pi),\ t > 0$
$u(x,0) = x^2 - \pi^2, \quad u_t(x,0) = 1$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0$

b) $u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = x + t + 2, \qquad x \in (0,\pi),\ t > 0$
$u(x,0) = x^2 - \pi^2, \quad u_t(x,0) = 2 + x - \pi$
$u_x(0,t) = t, \quad u(\pi,t) = t^2 + t$

2. Bestimmen Sie die Lösung der Laplace–Gleichung im Innengebiet $D_i:\ x^2 + y^2 < 1$ und im Außengebiet $D_a:\ x^2 + y^2 > 1$, die die Randbedingung $u(r,\varphi) = 1 + 8\sin 2\varphi - 3\cos\varphi$ für $(x,y) \in \partial D$ erfüllt.

3. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der Laplace–Gleichung im Gebiet $D:\ x^2 + y^2 < 1$ bei der Randbedingung 2. Art $\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ für $(x,y) \in \partial D$.

4. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der DGl $\Delta u = 0$ für $(x,y) \in D : x^2 + y^2 + 2x < 0$,
welche die RB $u(x,y) = 4x^3 + 6x - 1$, $(x,y) \in \delta D$ erfüllt.

5. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung $\Delta u = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ für die Raumladungsdichte
$\varrho = \varrho_0 r^n$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, (ε-Dielektrizitätskonstante).

6. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie das Potential u in der Umgebung von zwei kegelförmigen Elektroden, deren Spitzen gegeneinander isoliert sind.

Kugelkoordinaten: $u(r,\vartheta,\varphi) = u(\vartheta)$
RB: $u(\vartheta_1) = u_1 = \text{konst}$
RB: $u(\vartheta_2) = u_2 = \text{konst}$