TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002

Institut für Mathematik

Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Eindeutigkeit von Lösungen von PDGL

Partielle Differentialgleichungen - 7. Übung

Wiederholung: Satz von Gauß

Warum sind Trommeln rund ?

Theorie zu den Eigenschwingungen von quadratischen und kreisförmigen Membranen.

1. (Vorrechenaufgabe) Bestimmen Sie die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung $\Delta u = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ für die Raumladungsdichte $\varrho = \varrho_0 r^n,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$ (ε Dielektrizitätskonstante) bei Vorliegen eines kugelsymmetrischen Feldes $u(r)$.

2. Beweisen Sie die Folgerung 5 (Abschnitt 4.3, Seite 73) der Vorlesung und die zusätzliche Behauptung, daß die dort auftretende Grenzfunktion u harmonisch ist. Benutzen Sie dabei die Tatsache, daß die folgende Umkehrung des Mittelwertsatzes für harmonische Funktionen gilt: Ist $w \in C(\bar{G})$ und gilt für jedes $x \in G$ und jede Kugel $B(x,r) \subset G$ die Beziehung

$$w(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} w(y)\, dy, \tag{1}$$

so ist w harmonisch.

3. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Lösung des 3. Randwertproblems für die Laplacegleichung (Benutzen Sie Lemma 4, Abschnitt 4.3, S.74 aus der Vorlesung), falls $\alpha > 0$ gilt.

4. (Vorrechenaufgabe) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand Γ, $v \in C^1(\bar{G})$,
$u \in C^2(\bar{G})$. Beweisen Sie die Formel der partiellen Integration

$$\int\limits_G u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_G v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_\Gamma uv\, \nu_i ds, \tag{2}$$

wobei ν_i die i–te Komponente des äußeren Normalenvektors ν bezeichnet, sowie die Greensche Formel

$$\int\limits_G v \Delta u\, dx = -\int\limits_G (\nabla u, \nabla v)\, dx + \int\limits_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds. \tag{3}$$

(Hinweis zu (2): Wenden Sie den Gaußschen Satz auf die Vektorfunktion an, deren i–te Komponente gleich uv ist und deren restliche Komponenten 0 sind.)