Technische Universität Berlin WS 02/03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII`

Musterlösung Aufgabe 23 (d)

Es seien $f, g \in C^\infty(I)$, $p_\nu(f,g) = \|f^{(\nu)} - g^{(\nu)}\|_\infty, \nu \in \mathbb{N}$ und

$$d(f,g) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(f,g)}{1 + p_\nu(f,g)}.$$

Wir setzen die Aufgabenteile (a)-(c) als bekannt voraus.
Behauptung: $C^\infty(I)$ ist bezüglich d ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy- Folge bzgl. d in $C^\infty(I)$, d.h zu $0 < \epsilon$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N_0$ gilt $d(f_m, f_n) < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Daraus folgt: $\|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy- Folge bzgl. der Supremumsnorm. Da $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ bekanntlich vollständig ist, existiert ein $f \in C(I)$ mit $\forall x \in I : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Es bleibt der Nachweis $\forall N \in \mathbb{N} : f \in C^N(I)$ schuldig. Wegen $C^\infty(I) = \cap_{\nu\in\mathbb{N}} C^\nu(I)$ folgt dann, dass f beliebig oft differenzierbar ist.
Wir führen eine vollständige Induktion, wobei der Induktionsschritt $N = 0$ bereits erledigt ist. Es sei $f \in \cap_{\nu \leq N} C^\nu(I)$, sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(\nu)}(x) = f^{(\nu)}(x), \nu = 1, \ldots, N$ bereits erkannt. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy- Folge bzgl. d ist existiert zu $0 < \epsilon$ ein $N_0(N) \in \mathbb{N}$, so dass für $m, n \geq N_0(N)$ gilt:

$$\frac{1}{2^{N+1}} \frac{p_{N+1}(f_n, f_m)}{1 + p_{N+1}(f_n, f_m)} < d(f_n, f_m) < \frac{1}{2^{N+1}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \text{ also } p_{N+1}(f_n, f_m) < \epsilon.$$

Damit ist $(f_n^{(N+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy- Folge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und da die $f_n^{(N+1)}$ allesamt stetig sind folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(N+1)}(x) =: \hat{f}(x)$. Diese Konvergenz ist gleichmässig (!) und nach Satz 21.11 ist damit auch $f^{(N)}$ differenzierbar. Ausserdem erhalten wir nach Vertauschen von Limesbildung und Differenziation

$$\hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n^{(N)}(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n^{(N)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(N)}(x) = f^{(N+1)}(x).$$

Wir haben also mehr gezeigt, nämlich, dass sich alle Ableitungen von f durch die Ableitungen der f_n berechnen lassen. Es ist also $f \in C^{N+1}(I)$ und damit der Induktionsbeweis fertig.
Wir müssen jetzt noch zeigen, dass das von uns bestimmte f auch tatsächlich bzgl. unserer Metrik d die gesuchte Grenzfunktion der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darstellt.
Nach Voraussetzung existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N_0$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(f_m, f_n)}{1 + p_\nu(f_m, f_n)} < \epsilon.$$

Da $\|\cdot\|_\infty : C(I) \to \mathbb{R}$ stetig ist folgt $\lim\limits_{m\to\infty} p_\nu(f_m, f_n) = p_\nu(f, f_n), \nu \in \mathbb{N}$. Daraus folgt also

$$\sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{2^\nu} \frac{p_\nu(f, f_n)}{1 + p_\nu(f, f_n)} \leq \epsilon.$$

Da die letzte Aussage für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt folgt nun

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_\nu(f, f_n)}{1 + p_\nu(f, f_n)} \leq \epsilon.$$

Fertig.