Technische Universität Berlin SoSe 03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII`

5.Übung „Analysis II “

16.) Definieren folgende Ausdrücke Metriken auf X? Beweisen Sie ihre Aussagen!

(a) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = e^{x-y}$.

(b) $X = \mathbb{N}$, $d(m, n) = \begin{cases} 0 & , m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n} & , m \neq n \end{cases}$.

(c) $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, definiere eine Funktion $S : X \to \mathbb{R}$ durch

$$S(x) = \begin{cases} 1 & , x = \infty \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & , x \in \mathbb{R} \\ -1 & , x = -\infty \end{cases} \quad \text{und} \quad d(x, y) = |S(x) - S(y)|.$$

(d) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sin^2 \|x - y\|_2$.

2x4 + 2x2 = 12 Punkte

Definition: Eine *Pseudometrik* auf der Menge $X \neq \varnothing$ ist eine Abbildung $p : X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\forall x \in X : p(x, x) = 0$,

(b) $\forall x, y, z \in X : p(x, y) \leq p(x, z) + p(y, z)$.

17.) Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und p eine Pseudometrik auf X.

Zeigen Sie:

(a) $\forall x, y \in X : p(x, y) \geq 0$.

(b) $\forall x, y \in X : p(x, y) = p(y, x)$.

(c) $\forall x, y, z \in X : p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$.

Eine Pseudometrik ist also genau dann eine Metrik, wenn aus $p(x, y) = 0$ schon $x = y$ folgt.

6 Punkte

Bitte wenden!

18.) Sei $\{p_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ eine Menge von Pseudometriken auf X. Ferner gelte für alle $x, y \in X$:

$$x = y \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : p_n(x, y) = 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x, y)}{1 + p_n(x, y)}$$

eine Metrik auf X definiert.

(Tipp: Untersuchen Sie die Funktion $\frac{x}{1+x}$.)

8 Punkte

19.) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\varnothing \neq A \subset X$. Sei weiter d_A die von d in A induzierte Metrik, d.h. für $x, y \in A$ ist $d_A(x, y) := d(x, y)$.

Zeigen Sie :

$U \subset A$ ist offen bezüglich d_A genau dann, wenn es eine bezüglich d in X offene Menge $\widetilde{U} \subset X$ gibt, für die $U = \widetilde{U} \cap A$ ist.

4 Punkte

$\sum$ **30 Punkte**

Abgabe: 26. 5. 03, in der Übung.