Technische Universität Berlin SoSe 03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII`

9. Übung „Analysis II “

33.) Sei P ein Punkt innerhalb und Q ein Punkt außerhalb des Einheitskreises. Zeigen sie, dass jede Spur eines parametrisierten Weges von P nach Q den Einheitskreis schneiden muss.

2 Punkte

34.) Gegeben seien die parametrisierten Kurven

- $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ (logarithmische Spirale)
- $\gamma_2^r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2^r(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $r \geq 0$.

Berechnen Sie:

(a) den Einheits Tangentenvektor t_1 und t_2^r von γ_1 und γ_2^r an jeder sinnvollen Stelle $t \in \mathbb{R}$,

(b) die Bogenlänge $L(\gamma_1|_{[0,a]})$ für $a \geq 0$ und zusätzlich $\lim\limits_{x \to -\infty} L(\gamma_1|_{[x,0]})$.

(c) den/die Schnittpunkt/e P^r und die Schnittwinkel α^r von γ_1 mit γ_2^r.

(d) Fertigen Sie eine Skizze an die Ihre Rechenergebnisse illustriert.

4 + 3 + 3 + 2 Punkte

35.) Vorgegeben sei der Weg

$$\gamma : [0, e^\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t, t \sin(\ln t)), & t \neq 0 \\ (0, 0), & t = 0 \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(a) Der Weg γ ist rechtsseitig stetig in 0.

(b) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x \to 0} L(\gamma|_{[x,e^\pi]})$.

(c) Der Weg γ ist rektifizierbar.

2+ 4 + 2 Punkte

Bitte wenden!

36.) Berechnen Sie für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
Warum steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zum Satz von H. A. Schwarz?
4 Punkte

37.) Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ unstetig ist.

(b) Berechnen sie **alle** partiellen Ableitungen erster Ordnung (insbesondere in $(0,0)$).
Warum steht das Ergebnis nicht im Widerspruch dazu, dass eine differenzierbare Funktion stetig ist?

2 + 4 Punkte

$\sum$ **32 Punkte**

Abgabe: 23.6.03, in der Übung.