Technische Universität Berlin SoSe 03
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. G. Frank / J. Meyer / D. Timmreck
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/AnalysisII`

„Analysis II “
Was man zur Klausur auswendig können sollte

Diese Übersicht soll Ihnen helfen unwichtiges und wichtiges auseinander zu halten. Sie erhebt allerdings keinen Anspruch auf Vollständigkeit und darf nicht während der Klausur benuntzt werden.

1. Grundrechenarten
   $+, -$, Bruchrechnung, Potenzgesetze, ... auch für komplexe Zahlen

2. Ungleichungen
   ... auch mit Brüchen und Beträgen.

3. Binomische Formeln

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\\ (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

4. Wichtige Funktionen
   Funktionsverläufe und Wertetabellen für die trigonometrischen Funktionen ergänzen!

   (a) Exponentialfunktion
   $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$
   Definition:
   $$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$
   Funktionalgleichung: $e^{(x+y)} = e^x e^y$
   Ableitung: $(e^x)' = e^x$
   Wichtige Werte: $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
   Grenzwerte: $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

   (b) Natürlicher Logarithmus
   $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
   Definition: Umkehrfunktion von exp
   Funktionalgleichung: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   Ableitung: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
   Wichtige Werte: $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
   Grenzwerte: $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

(c) Trigonometrische Funktionen
Definition: $e^{ix} =: \cos x + i \sin x$
Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 + \cos^2 = 1$
Additionstheoreme: $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\beta)\sin(\alpha)$,
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
Ableitungen: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$
Tangens und Cotangens: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{\cos}{\sin}$
Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Die Umkehrfunktionen heißen „arcus“Funktionen arcsin, arccos und arctan

(d) Hyperbelfunktionen
Definition: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$
Die Umkehrfunktionen heißen „Area“Funktionen Arsinh, Arcosh und Artanh.

5. Ableitungsregeln
...auch mehrdimensional

6. Integrationsregeln
sowie Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale

7. Folgen und Reihen
Grenzwertsätze, Konvergenzkriterien, Regel von de L'Hospital.
Funktionenfolgen (punktweise und gleichmäßige Konvergenz, Vertauschungssätze)
Wichtige Reihen:

(a) geometrische Reihe:
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$
für $|q| < 1$

(b) binomische Reihe:
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$
mit $\binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j}$

(c) harmonische Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
divergiert

(d)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$
divergiert für $\alpha \leq 1$ und konvergiert für $\alpha > 1$

(e) Exponentialreihe s.o.

(f) Sinus- und Cosinusreihe

8. Definitionen von Grundbegriffen, ...z.B Metrik, Norm, Stetigkeit u.s.w.