TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe Ausgabe:
Körner Abgabe:

11. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I

(Isolierte Singularitäten und Semesterüberblick)

Ü 1. Aufgabe

Sei f im Gebiet G analytisch bis auf Polstellen. Man zeige, dass dann die Polstellen keinen Häufungspunkt in G haben können.

Ü 2. Aufgabe

Seien $R > 0$ und $G := \{z \ : \ |z| > R\}$. Man sagt, eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat in $z = \infty$ eine hebbare Singularität (einen Pol der Ordung m / eine wesentliche Singularität), falls die Funktion $f(1/z)$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität (einen Pol der Ordung m / eine wesentliche Singularität) hat.
a) Man zeige, dass eine ganze Funktion genau dann in $z = \infty$ eine hebbare Singularität hat, wenn sie konstant ist.
b) Man zeige, dass eine ganze Funktion genau dann in $z = \infty$ einen Pol der Ordnung m hat, wenn f ein Polynom vom Grad m ist.

Semesterüberblick

1. Aufgabe

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k (z-i)^{k^2}$? Wo ist die Konvergenz absolut, wo lokal gleichmäßig?

2. Aufgabe

a) Formulieren Sie die Cauchysche Integralformel (mit ihren Voraussetzungen)!
b) Formulieren Sie die Integralformel für die Koeffizienten einer Laurentreihe (mit ihren Voraussetzungen)!

3. Aufgabe

Sei f_n eine Folge von im Gebiet $G \supset \overline{\mathbb{D}}$ analytischen Funktionen. Man zeige: Wenn $f_n(z) \to 0$ auf der Kreislinie $|z| = 1$ lokal gleichmäßig konvergiert, so konvergiert $f_n(z) \to 0$ lokal gleichmäßig in ganz $\overline{\mathbb{D}}$.
(Kann man hier "lokal gleichmäßig" durch "gleichmäßig" ersetzen?)

4. Aufgabe

Sei $R > 0$ gegeben und seien die Funktionen f und g analytisch in $\{z \, : \, |z| > R\}$. Zeigen Sie:
Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f((n+2)R) = g((n+2)R)$ und f und g beide in $z = \infty$ hebbare Singularitäten haben, so ist $f \equiv g$. (Hinweis: Man betrachte $f(1/z)$ und $g(1/z)$.)

5. Aufgabe

Formulieren Sie das Maximumsprinzip für analytisch Funktionen in einem beschränkten Gebiet!

6. Aufgabe

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{2}{z^2 + 2iz}$ in den Kreisringen

$A_1 = \{z \quad : \quad 0 < |z| < 1\}$ und $A_2 = \{z \quad : \quad 0 < |z + 2i| < 1\}$ in eine Laurentreihe und bestimmen Sie jeweils die maximalen Konvergenzbereiche dieser Laurentreihen!
b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2iz} \, dz \qquad \int_{|z|=3} \frac{1}{z(z^2 + 2iz)} \, dz, \qquad \int_{|z+2i|=1} \frac{z^2}{(z^2 + 2iz)} \, dz.$$

Gesamtpunktzahl: 0

Der **Test** zum Semesterende findet
am **Dienstag** dem **15.7.03** um **8.30 Uhr**
im Raum **MA 042** statt.