TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner

Ausgabe: 22.5.2003 in der Übung
Abgabe: 3.6. 2003 in der Vorlesung

5. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I/

(Integration)

Ü 1. Aufgabe

a) Sei $k(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_k \frac{1}{z}\, dz$.

b) Für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ berechne man $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{z}\, dz$, wobei der Integrationsweg zunächst auf der reellen Achse von 1 nach $|a|$ und dann auf dem Kreisbogen $z = |a|$ laufen soll ohne die negative reelle Achse zu schneiden.

Ü 2. Aufgabe

Seien $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve, $G \supset \gamma[0, 1]$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion.

Man zeige: Für $t \in (0, 1)$ ist $\displaystyle\frac{d}{dt}\,(f \circ \gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$.

Ü 3. Aufgabe

Sei $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ eine analytische Funktion in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$.

a) Beweisen Sie, dass f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \qquad \text{erfüllt.}$$

b) Folgern Sie, dass $\operatorname{Re} f$ harmonisch ist, d.h. $\Delta u(x, y) \equiv 0$.

H 4. Aufgabe (10 Punkte)

Die Kurve k sei die Strecke von $-1+i$ bis $1+i$. Man berechne das Kurvenintegral $\displaystyle\int_k z^2\, dz$ und zeige, dass der Mittelwertsatz der Integralrechnung für komplexe Kurvenintegrale *nicht* gilt.

(MWS der Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi) \cdot (b-a)$ für ein $\xi \in [a, b]$)

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Definiere $G^* := \{\bar{z} \ : \ z \in G\}$. Man zeige:

Wenn $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch ist, so ist auch die Funktion $f^* : G^* \to \mathbb{C}$, definiert durch $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ analytisch.

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Man zeige:

a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in G$ oder $f'(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in G$, so ist f konstant.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$

i) die komplexe Ebene bijektiv und stetig auf die Einheitskreisscheibe $|z| < 1$ abbildet.

ii) in keinem Begiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytisch, aber in $z = 0$ komplex differenzierbar ist.

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

"Analytische Funktionen sind winkeltreu."

Präzisieren Sie diese Aussage, und beweisen Sie sie unter angemessenen Voraussetzungen.

Gesamtpunktzahl: 40