Kapitel 2

Klassifikation und Charakteristiken

2.1 Koordinatentransformation

Wir untersuchen hier partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearem Hauptteil

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \tag{2.1}$$

Gegeben sind n^2 stetige Funktionen $a_{ij} : G \to \mathbb{R}$ sowie die Funktion Φ, die uns hier nicht weiter interessiert. Wir dürfen Symmetrie annehmen, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, denn ansonsten symmetrisieren wir durch

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

und erhalten den selben Wert des Hauptteils, weil für $u \in C^2(G)$ der Satz von Schwarz gilt.

Wir fassen die a_{ij} zu einer Matrix A zusammen

$$A = A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

und können A als symmetrisch voraussetzen.

Beispiele 1. Laplace-Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \Phi = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wärmeleitgleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \Phi = -u_t$$

t entspricht hier x_4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Wellengleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \Phi = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Tricomi-Gleichung

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Phi = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Burgers-Gleichung

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Phi = -u_t + u \cdot u_x$$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oft ist es nicht sinnvoll, in den gegebenen kartesischen Koordinaten zu rechnen, sondern man zieht andere Koordinaten vor, je nach Beschaffenheit des Gebietes G. Dann muss man die PDE transformieren.

Gegeben sei die *Koordinatentransformation*

$$y = F(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Beachte: $F: \ x \mapsto y$, also $F^{-1}: \ y \mapsto x$.

<u>Beispiel</u> *Polarkoordinaten*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Keiner verwendet hier die obige Schreibweise. Wir haben

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix},$$

somit ist F^{-1} gegeben.

Frage: Wie sieht der Laplace-Operator

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

in den neuen Koordinaten aus ? Diese Koordinatentransformation ist mit viel Rechnen und mehr oder weniger großer Wahrscheinlichkeit des Verrechnens verbunden. Wir diskutieren zuerst die einfachste *direkte Methode* für den Fall der Polarkoordinaten und behandeln den allgemeinen Fall eleganter.

$$u(x, y) = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = v(r, \varphi)$$

Wir berechnen zunächst $v_r = \dfrac{\partial v}{\partial r}$ und $v_\varphi = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$ für die neue Funktion v:

$$v_r = u_x \cdot x_r + u_y \cdot y_r = u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi$$

$$v_\varphi = u_x \cdot x_\varphi + u_y \cdot y_\varphi = u_x(-r\sin\varphi) + u_y r\cos\varphi$$

Wir lesen das als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von u_x, u_y und lösen auf. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} u_x &= v_r \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r} v_\varphi \\ u_y &= v_r \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{r} v_\varphi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Auf diese Weise haben wir u_x, u_y durch r und φ dargestellt. Um u_{xx} darzustellen, betrachten wir die rechte Seite der oberen Gleichung von (2.3) als neue Funktion $\tilde{v}(r, \varphi)$ und wenden die eben durchgeführte Prozedur zur Bestimmung von u_{xx} an:

$$u_{xx} = (u_x)_x = \tilde{v}_r \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r} \tilde{v}_\varphi$$

Nun heißt es also $\tilde{v}_r$ und $\tilde{v}_\varphi$ ausrechnen, Gleiches für u_{yy} auszuführen und dan $u_{xx} + u_{yy}$ zu berechnen. Man erhält bei korrekter Berechnung

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} v_r = \frac{1}{r}(r v_r)_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}.$$

Somit ergibt sich der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten in der Form

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Umrechnung im allgemeinen Fall

Wir transformieren jetzt den *Hauptteil* von (2.1) gemäß der Transformation $y = F(x)$.

$$u(x) = u(F^{-1}(y)) = v(y)$$

Somit erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i}$$

nach dem Satz über das totale Differential. Völlig analog noch einmal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial y_l} \right) \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

Nun wird es wirklich unübersichtlich, so sieht es schöner aus

$$D_i D_j u = \sum_{k,l=1}^{n} D_i y_l D_j y_k \; D_l D_k v + \sum_{l=1}^{n} D_i D_j y_l \; D_l v.$$

Wir setzen das in den Hauptteil von (2.1) ein

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u = \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i y_l D_j y_k \right) D_l D_k v + \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j y_l \right) D_l v.$$

Die erste Klammer beschreibt die Koeffizienten des neuen Hauptteils. Die zweite Summe enthält nur Terme niedrigerer Ordnung.

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{lk}(y) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} a_{ij} \\
b_l &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Die nichtlinearen Terme $\Phi(x, u, \nabla u)$ transformiert man zu $\tilde{\Phi}(y, v, \nabla v)$.

Bemerkung: In (2.4) steckt noch ein Stolperstein. Die Ausdrücke rechts hängen alle von x ab und müssen geschickt durch y ausgedrückt werden.

Außerdem ist die Beziehung (2.4) noch recht unhandlich. Wir setzen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \ldots & \tilde{a}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{n1} & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

und können leicht nachrechnen, dass die obere Gleichung von (2.4) äquivalent ist mit

$$\tilde{A} = F'(x)AF'(x)^T,$$

wobei F' die Jacobi-Matrix von F ist

$$F' = \begin{pmatrix} D_1 y_1 & ... & D_n y_1 \\ ... & ... & ... \\ D_n y_1 & ... & D_n y_n \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatentransformation kann so mit folgendem Schema ausgeführt werden:

1. F' aufstellen
2. $\tilde{A}$ und b berechnen
3. Wenn noch nötig, x durch y ausdrücken

Spezialfall: Transformation des Laplaceoperators

$$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$\tilde{A} = F'(x)F'(x)^T.$$

$$b_l = \sum_{i=1} 1 \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i^2} = \Delta y_l$$

Wir halten fest

$$b_l = \Delta y_l \qquad l = 1, ..n.$$

Beispiel Laplaceoperator in Polarkoordinaten - Zweite Methode

Wir wenden die gebräuchlichen Bezeichnungen an, d.h. x_1, x_2, y_1, y_2 heißen jetzt wieder x, y, r und φ.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Aus G' könnten wir F' mittels $F' = (G')^{-1}$ berechnen.

$$G' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wir benutzen dazu die Invertierungsformel für 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$\det G' = r$ und erhalten

$$F' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$\tilde{A} = F' A (F')^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Das ist aber noch nicht alles, wir brauchen noch b_1 und b_2. Wir wissen schon, dass für den Laplace-Operator $b_1 = \Delta r$ und $b_2 = \Delta\varphi$ gilt. Wir benötigen also Ableitungen von r und φ nach x und y. Diese Ableitungen finden wir im Jacobian F'.

$$r_{xx} = (r_x)_x = (\cos\varphi)_x = -\sin\varphi \cdot \varphi_x = \frac{1}{r}\sin^2\varphi$$

$$r_{yy} = (r_y)_y = (\sin\varphi)_y = \cos\varphi \cdot \varphi_y = \frac{1}{r}\cos^2\varphi$$

Somit gilt $\Delta r = \frac{1}{r}$. Aus

$$\varphi_{xx} = (-\frac{1}{r}\sin\varphi)_x = \frac{1}{r^2}\sin\varphi \cdot r_x - \frac{1}{r}\cos\varphi \cdot \varphi_x = \frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi$$

und

$$\varphi_{yy} = (\frac{1}{r}\cos\varphi)_y = -\frac{1}{r^2}\cos\varphi \cdot r_y - \frac{1}{r}\sin\varphi \cdot \varphi_y = -\frac{2}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi$$

folgt $\Delta\varphi = 0$.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

Wir erhalten also wieder

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Beispiel: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

Die Herleitung der Formel erfolgt in der Übung. Wir geben hier nur das Ergebnis an.

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Beispiel: Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.2 Klassifikation linearer PDEs 2.Ordnung

Gegeben ist die Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \tag{2.5}$$

wobei wir wieder $A = (a_{ij})$ setzen. A wird wieder als symmetrisch vorausgesetzt und besitzt daher nur *reelle* Eigenwerte.

Definition: (elliptisch/hyperbolisch/parabolisch)

Die Gleichung (2.5) heißt in x

- *elliptisch*, wenn alle Eigenwerte von $A(x)$ positiv oder negativ sind, d.h. wenn $A(x)$ positiv oder negativ definit ist,
- *hyperbolisch*, wenn ein Eigenwert von $A(x)$ positiv und die anderen negativ sind oder ein Eigenwert negativ und die anderen positiv sind,
- *parabolisch*, wenn mindestens ein Eigenwert 0 ist.

In allen anderen Fällen wird die PDE häufig als ultrahyperbolisch bezeichnet.

Bemerkungen:

- Der Typ von (2.5) kann durchaus von x abhängen (siehe Tricomi-Gleichung).
- Im Fall $n = 2$ kann die Typbestimmung mit Hilfe der Determinante von A erfolgen: Aus $\det A(x) > 0$ folgt, dass die Gleichung elliptisch ist, $\det A(x) < 0$ impliziert, dass (2.5) hyperbolisch ist, und bei $\det A(x) = 0$ ist die Gleichung parabolisch.

Beispiele:

1. Laplace-Gleichung

$A = I$ und besitzt daher den n-fachen Eigenwert 1. Die Gleichung ist somit *elliptisch*.

2. Wärmeleitgleichung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Eigenwerte sind 1 und der vierte ist 0. Die Gleichung ist daher *parabolisch*.

3. Wellengleichung (3D)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Eigenwerte sind 1 und der vierte ist -1. Die Gleichung ist somit *hyperbolisch.*

4. Tricomi-Gleichung

$$A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix besitzt die Eigenwerte y und 1. Der Typ ist daher

$$y \begin{cases} > 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ < 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases}$$

Man sollte schon vor dem (numerischen) Rechnen wissen, von welchem Typ die Gleichung ist. Dies beeinflußt oft den Erfolg oder Mißerfolg einer numerischen Methode.

Bemerkung: Alle Beispiele 1.-4. lagen in Normalform vor, d.h. ohne gemischte partielle Ableitungen. Die Matrizen hatten Diagonalgestalt und wir konnten die Eigenwerte einfach auf der Hauptdiagonalen ablesen.

2.3 Die Charakteristikenmethode für quasilineare Gleichungen erster Ordnung

Vorgegeben ist die Gleichung

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{2.6}$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, also eine quasilineare PDE erster Ordnung. Wir werden die sogenannte *Charakteristikenmethode* geometrisch herleiten, ohne sie allerdings exakt zu begründen. Dazu verweisen wir auf SMIRNOV, Band IV. Wir erhalten auf diese Weise eine erste Vorstellung vom Begriff der Charakteristik.

Zunächst formulieren wir (2.6) um zu

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Bekanntlich ist der Vektor $(u_x, u_y, -1)^T$ Normalenvektor zur Fläche $u = u(x, y)$. Folglich liegt der Vektor $(a, b, c)^T$ jeweils in der Tangentialebene zum Punkt $(x, y, u(x, y))$.

Während die Fläche $u = u(x, y)$ unbekannt und gesucht ist, kennen wir den Vektor (a, b, c) in jedem Raumpunkt $(x, y, u) \in \mathbb{R}^3$. Somit definiert (a, b, c) ein Vektorfeld, und wir können dessen Feldlinien bestimmen. Dies sind Kurven

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ u(s) \end{pmatrix},$$

dessen Tangentialvektoren an der Stelle $(x(s), y(s), u(s))$ parallel zur Richtung $(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$ sind. Daraus leiten wir die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x(s), y(s), u(s)) \\ y'(s) &= b(x(s), y(s), u(s)) \\ u'(s) &= c(x(s), y(s), u(s)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die Lösungen bezeichnet man als *Charakteristiken* oder *charakteristische Kurven*. Diese Kurven füllen das gesamte Raumgebiet aus. Wir wollen aber mit ihnen eine Fläche $u = u(x, y)$ aufspannen. Es liegt auf der Hand, dass zur Fixierung einer Lösung von (2.6) weitere Daten benötigt werden.

Dazu geben wir eine passend gewählte stückweise glatte Kurve $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^3$ vor und verlangen, dass die gesuchte Fläche u durch $\mathcal{L}$ geht. Jetzt lässt sich diese Fläche leicht konstruieren. Wir betrachten all jene Feldlinien, die $\mathcal{L}$ schneiden. Ist $\mathcal{L}$ nicht gerade ungeschickt gewählt, dann spannen diese Feldlinien eine Fläche auf.

Nach Konstruktion definiert die Fläche eine Lösung u von (2.6), denn überall ist $(u_x, u_y, -1)^T$ senkrecht zur Fläche. Es sei Γ die Projektion von $\mathcal{L}$ auf die $x-y$-Ebene. Dann haben wir geometrisch folgendes Problem gelöst:

Gesucht ist eine Lösung u von (2.6), stückweise glatt, so dass $u(x, y) \in \mathcal{L}$ für alle $x, y \in \Gamma$.

Definition: Das eben definierte Problem heißt *Cauchyproblem* für (2.6).

Wir wollen nicht genauer auf die Fragen von Existenz und Eindeutigkeit von u eingehen und verweisen dazu auf SMIRNOV, Band IV Nr. 99–102. Eines ist aber geometrisch klar - gibt man $\mathcal{L}$ ungeschickt vor, dann sind Existenz und Eindeutigkeit nicht gesichert.

Schlechte Wahl: $\mathcal{L}$ ist selbst charakteristisch.

Beispiel: $3(u-y)^2 u_x - u_y = 0$.

$$\mathcal{L} = \{(x, y, u) |\, x = 0,\ y = t,\ u = t,\ t \in \mathbb{R}\}$$

t ist der Parameter für $\mathcal{L}$ und s der für die Charakteristiken. Wir erhalten die charakteristischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'(s) &= 3(u(s) - y(s))^2 \\ y'(s) &= -1 \\ u'(s) &= 0 \end{aligned}$$

Der Anfangswert

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

ist unbekannt und später festzulegen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(s) &\equiv u_0 \\ y(s) &= -s + y_0 \\ x'(s) &= 3(u_0 + s - y_0)^2 \\ x(s) &= (u_0 + s - y_0)^3 + c. \end{aligned}$$

Für $s = 0$ gilt $x_0 = (u_0 - y_0)^3 + c$, also $c = x_0 - (u_0 - y_0)^3$. Um die richtigen Feldlinien auszusondern, lassen wir (x_0, y_0, u_0) entlang $\mathcal{L}$ laufen:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = u_0 = t$$

Somit gilt

$$u(s) = t, \quad y(s) = t - s, \quad x(s) = s^3.$$

Nun bleibt noch u in der Form $u = u(x, y)$ darzustellen. Sei (x, y) gegeben. Dann folgt $s = x^{1/3}$ und daraus

$$t = y + s = x^{1/3} + y, \quad u = t = x^{1/3} + y.$$

Sie prüfen nach, dass $u = x^{1/3} + y$ wirklich Lösung ist.

Bemerkungen:

1. u ist nicht stetig partiell differenzierbar bei $x = 0$.

2. Allgemein ergibt die Methode

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t).$$

   Zur Darstellung $u = u(x,y)$ muss (s,t) nach (x,y) auflösbar sein. Deshalb wird vorausgesetzt (Satz über implizite Funktionen)

$$\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} \neq 0.$$

   Im Beispiel erhält man als Determinate $3s^2$. Trotzdem hat es funktioniert.

3. Analog behandelt man Gleichungen höherer Ortsdimension,

$$a_1(x,u)D_1u + ... + a_n(x,u)D_nu = a_{n+1}(x,u)$$

   mit $x \in \mathbb{R}^n$, siehe Smirnov, Band IV.

4. In einigen Fällen kann man den Parameter s schon bei der Lösung von (2.7) "herauswerfen". Dazu mehr in der Übung.

2.4 Cauchyproblem und charakteristische Gleichungen

Wir betrachten die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Dimension n:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \tilde{f}(x) \tag{2.8}$$

Für $n = 1$ reduziert sich (2.8) auf die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$a_{11}(x)u''(x) + b_1(x)u'(x) + c(x)u(x) = \tilde{f}(x).$$

Um die Lösung festzulegen (es sei $a_{11} \neq 0$), geben wir *Cauchydaten* in $x = x_0$ vor:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_0 \\ u'(x_0) &= u_1. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe nennt sich *Cauchyproblem.* Wie kann man dies für (2.8) verallgemeinern ?

Cauchyproblem für (2.8): Gegeben sei im $\mathbb{R}^m$ eine glatte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit S:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m |\ F(x) = 0\},$$

wobei $\nabla F(x) \neq 0\ \forall x$ gelten soll. In jedem $x \in S$ sei eine Richtung $0 \neq l = l(x) \in \mathbb{R}^m$ definiert, die nicht tangential zu S ist.

Definition: (Cauchyproblem)

Gesucht ist eine Lösung $u = u(x)$ von (2.8) mit

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) \qquad x \in S \\ \frac{\partial u}{\partial l}(x) &= u_1(x) \qquad x \in S \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die auf S gegebenen Funktionen u_0, u_1 heißen *Cauchydaten.*
- $\dfrac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u, l)$ (Richtungsableitung)

Es zeigt sich, dass diese Aufgabe nur dann für beliebige Cauchydaten lösbar ist, wenn die Fläche S nicht falsch - nämlich nicht charakteristisch - gewählt ist. Um dies zu verdeutlichen, wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen

- $n = 2$
- S ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$
- $b = c(x) = \tilde{f} = 0$

- l ist konstant $\neq 0$ und $l \notin S$

Wir können also S beschreiben in der Form:

$$S: \ (f,x) = c \quad \text{mit } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Außerdem gilt

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad (f,l) \neq 0.$$

Für F ergibt sich $F(x_1,x_2) = (f,x) - c = f_1x_1 + f_2x_2 - c = 0$. Als *Cauchyproblem* erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= 0 \\ u(x_1,x_2) &= u_0(x_1,x_2) \quad \text{auf } S \\ \frac{\partial u}{\partial l}(x_1,x_2) &= u_1(x_1,x_2) \quad \text{auf } S \end{aligned}$$

und setzen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir transformieren nun S zu einer Horizontalen und wollen o.B.d.A $f_2 \neq 0$ voraussetzen.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= F(x_1,x_2) = (f,x) - c \end{aligned}$$

Die transformierte Gleichung lautet dann

$$\tilde{a}_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\tilde{a}_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \tilde{a}_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0. \tag{2.9}$$

Dabei gilt

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

insbesondere

$$\tilde{a}_{22} = f^T A f = (f, Af).$$

Wir transformieren nun die Gleichungen für die Cauchydaten:

$$x \in S \;\Leftrightarrow\; y \in \Sigma = \{(y_1, y_2)|\; y_2 = 0\}$$

Wir erhalten aus der Kettenregel

$$\nabla u = y'(x)^T \nabla v = \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \nabla v.$$

Für die Richtungsableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix} \nabla v, l \right) \\ &= \left(\nabla v, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} l \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y_1} \cdot l_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2} \cdot (f, l). \end{aligned}$$

Der Term (f, l) war laut unseren Voraussetzungen verschieden von Null. Ferner folgt

$$u_i(x_1, x_2) = u_i(x_1, \varphi(x_1)) = v_i(x_1) = v_i(y_1)$$

mit $i = 0, 1$ und

$$x_2 = \frac{1}{f_2}(c - f_1 x_1) =: \varphi(x_1).$$

Somit erhalten wir die transformierten Cauchydaten

$$v(y_1, 0) = v_0(y_1) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, 0) l_1 + \frac{\partial v}{\partial y_2}(y_1, 0) \cdot (f, l) = v_1(y_1). \tag{2.11}$$

Wir betrachten nun zwei Fälle:

Fall 1: $\tilde{a}_{22} \neq 0$ (gutartiger Fall)

Aus (2.10) folgern wir

$$\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, 0) = v_0'(y_1), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = v_0''(y_1)$$

und aus (2.11)

$$\frac{\partial v}{\partial y_2} = (v_1(y_1) - l_1 \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1, 0)) \cdot \frac{1}{(f,l)} = (v_1(y_1) - l_1 v_0'(y_1)) \cdot \frac{1}{(f,l)}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach y_1 liefert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{(f,l)}(v_1'(y_1) - l_1 v_0''(y_1)).$$

Nur $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$ bekommen wir so nicht, dafür aber aus (2.9)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = -\frac{1}{\tilde{a}_{22}} \left(\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} \right).$$

Somit bekommen wir alle zweiten Ableitungen von v und keine Einschränkungen an v_0 und v_1.

Fall 2: $\tilde{a}_{22} = 0$ (ungünstiger Fall)

Hier können wir $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$ nicht aus (2.9) berechnen. Im Gegenteil, es folgt aus (2.9) eine Einschränkung an die Cauchydaten:

$$\tilde{a}_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\tilde{a}_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} = 0,$$

das heißt

$$\tilde{a}_{11} v_0''(y_1) + 2\tilde{a}_{12} \frac{1}{(f,l)}(v_1'(y_1) - l_1 v_0''(y_1)) = 0.$$

Folgerungen:

1. Im Fall 2 ist das Cauchyproblem nicht uneingeschränkt lösbar.
2. Probleme gibt es für Richtungen f ($f = \nabla F$), welche die Gleichung

   $$(f, Af) = 0$$

   lösen.

Wir kehren nun zum allgemeinen Fall zurück:

- Mannigfaltigkeit $F(x_1, ..., x_n)$
- $A = A(x)$
- o.B.d.A. $\dfrac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$
- $\tilde{a}_{nn} = (\nabla F(x), A(x)\nabla F(x))$

Definition: Ein Punkt $x \in S = \{x| \; F(x) = 0\}$ heißt *charakteristischer Punkt* und S heißt *charakteristisch in* x, wenn

$$(\nabla F(x), A(x)\nabla F(x)) = 0$$

gilt. S heißt *charakteristisch*, wenn dies überall auf S gilt.

Folgerung: Auf charakteristischen Mannigfaltigkeiten (Kurven bei $n = 2$, Flächen bei $n = 3$, ...) ist es nicht sinnvoll, Cauchydaten vorzugeben.

Wir wollen nun das Problem umgekehrt stellen: Wie muss eine Funktion F aussehen, damit die zugehörige Fläche S charakteristisch wird ? Wir schauen uns das für $n = 2$ an, $F = F(x, y)$: Es muss gelten

$$(\nabla F, A\nabla F) = a_{11}F_x^2 + 2a_{12}F_xF_y + a_{22}F_y^2 = 0.$$

Wir werden sehen, dass die Bestimmung von F äquivalent dazu ist, die *charakteristische Gleichung*

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$$

zu lösen.

Folgerung: Durch die Lösung der charakterischen Gleichung gewinnen wir Funktionen, welche charakteristische Mannigfaltigkeiten erzeugen.

Einige Beispiele für charakteristische Flächen

1. Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

Die Richtung $f = \nabla F$ müßte die Gleichung

$$f_1^2 + ... + f_n^2 = 0$$

erfüllen, was nur für $f = 0$ gilt. Die Laplacegleichung hat daher keine reellen Charakteristiken und das Cauchyproblem ist stets sinnvoll.

2. Schwingungsgleichung (1D)

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

Wir erhalten die Gleichung

$$f_1^2 - a^2 f_2^2 = 0.$$

Die charakteristischen Flächen sind demzufolge $t = ax$ und $t = -ax$.

3. Schwingunsgleichung (2D)

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

Aus der Gleichung

$$f_1^2 - a^2(f_2^2 + f_3^2) = 0$$

erhalten wir die charakteristische Fläche $t^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (charakteristischer Kegel).

4. Wärmeleitgleichung (1D)

$$u_{xx} = u_t$$

Wir erhalten aus der Gleichung

$$f_1^2 + 0 \cdot f_2^2 = 0,$$

daß f_2 beliebig gewählt werden kann und somit die Charakteristiken $f(t) = 0$ oder $t = const.$. Es ist daher sinnlos, die Cauchydaten $u(x, 0)$ und $u_t(x, 0)$ vorzugeben. Aus beiden Daten heraus könnten wir nämlich Informationen über $u_{xx}(x, 0)$ gewinnen ...

Abschließend sei bemerkt, dass das Cauchyproblem auch bei nichtcharakteristischen Flächen sehr schwierig ist, oft inkorrekt gestellt. Auskunft über die Lösbarkeit gibt der berühmte

Satz 1 *(Kowalewskaja) Sind alle gegebenen Größen analytisch und ist S nirgends charakteristisch, dann besitzt das Cauchyproblem in der Klasse der* analytischen Funktionen *lokal genau eine Lösung.*

Bemerkung:

- Es kann andere, nicht analytische Lösungen geben.
- Die Lösung braucht nur lokal zu existieren.

Der Beweis ist sehr aufwändig und wird mit Potenzreihenansätzen und nachfolgendem Koeffizientenvergleich geführt.

Literatur: Petrowski, Michlin

2.5 Transformation linearer partieller Differentialgleichungen von zwei Veränderlichen auf Normalform

Wir betrachten die Gleichung

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + c \cdot u + f = 0 \tag{2.12}$$

mit gegebenen Funktionen $a_{ij} = a_{ij}(x,y)$, $b_i = b_i(x,y)$, $c = c(x,y)$ und $f = f(x,y)$ in einem Gebiet der $x-y$-Ebene. Nun wird eine Koordinatentransformation angewendet (Ziel: Normalform),

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y).$$

Dann gilt $u(x,y) = v(\xi,\eta) = v(\varphi(x,y),\psi(x,y))$. Nach Transformation entsteht

$$\tilde{a}_{11}v_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}v_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}v_{\eta\eta} + \Phi = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\
\tilde{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\
\tilde{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2
\end{aligned}$$

und Φ enthält alle Terme niederer Ordnung. Unser Ziel: Wir wollen φ so wählen, dass $\tilde{a}_{11} = 0$ gilt. Das ergibt eine partielle Differentialgleichung für $z = \varphi(x, y)$:

$$a_{11}(x, y)z_x^2 + 2a_{12}(x, y)z_x z_y + a_{22}(x, y)z_y^2 = 0 \tag{2.13}$$

Lemma 1 *$z = \varphi(x, y)$ ist genau dann (partikuläre) Lösung von (2.13), wenn $\varphi = c$ allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$a_{11}(x, y)dy^2 - 2a_{12}(x, y)dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{2.14}$$

ist.

Das ist die bereits avisierte *charakteristische Gleichung.*

Beweisgedanke: Wir zeigen nur (2.13) $\Rightarrow$ (2.14). Dazu wollen wir annehmen, dass $\varphi(x, y) = c$ nach y auflösbar ist, d.h. wir wollen $\varphi_y \neq 0$ voraussetzen. Es sei z Lösung von (2.13). Division durch φ_y ergibt

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0.$$

Wir betrachten nun die implizite Funktion $y = y(x)$, welche durch $\varphi(x, y) = c$ definiert ist. Implizite Differentiation liefert

$$\varphi_x + \varphi_y \cdot y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Oben eingesetzt und mit dx^2 durchmultipliziert ergibt das (2.14). $\square$

Eine genaue Diskussion findet man bei Tikhonov/Samarski. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind wieder unsere Charakteristiken.

Wir gehen jetzt von der Form

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{12} = 0$$

von (2.14) aus. Wir erhalten zwei Lösungen

$$y'(x) = \frac{a_{12}(x, y) + \sqrt{a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y)}}{a_{11}(x, y)} \tag{2.15}$$

$$y'(x) = \frac{a_{12}(x, y) - \sqrt{a_{12}^2(x, y) - a_{11}(x, y)a_{22}(x, y)}}{a_{11}(x, y)} \tag{2.16}$$

Folgerung: Wir haben (i.a.) zwei verschiedene Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der charakteristischen Gleichungen. Dem entsprechen zwei verschiedene Funktionen $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$. Wir bemerken ferner, dass der Koeffizient $\tilde{a}_{22}$ durch das selbe Polynom wie $\tilde{a}_{11}$ berechnet wird. Setzen wir aber $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ so folgt $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = 0$.

Bemerkung:

1. (2.15) und (2.16) sind symmetrisch bezüglich a_{11}, a_{22}. es ist daher gleich, ob wir die charakteristische Gleichung durch $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ auflösen.
2. Die Wurzel entscheidet in (2.15) und (2.16) über den Typ der Gleichung. Wegen $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det A = -\lambda_1\lambda_2$ ist der Typ der Gleichung
    - hyperbolisch, falls $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
    - parabolisch, falls $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
    - elliptisch, falls $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$

Transformation auf Normalform:
a) Hyperbolische Gleichungen

φ und ψ seien Lösungen von (2.15),(2.16).

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y) \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} = 0.$$

Dann kann nicht auch noch $\tilde{a}_{12}$ verschwinden, sonst wäre nur der Term Φ da, welcher die Ordung ≤ 1 besitzt. Rücktransformation ergäbe eine Gleichung erster Ordnung im Gegensatz zu unseren Annahmen.

Wir können deshalb durch $\tilde{a}_{12}$ teilen und erhalten die *kanonische Form der hyperbolischen Gleichung*

$$v_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

Diese Form benötigen wir später für die d' Alembertsche Formel. Die Schwingungsgleichung hat nicht diese Form. Transfomieren wir aber nochmals

$$\xi = \alpha + \beta,\ \eta = \alpha - \beta \quad \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta),\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

und bezeichnen wir die neue gesuchte Funktion mit w, so entsteht

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = G(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta).$$

b) Parabolische Gleichungen

Wir erhalten hier nur eine Funktion $\xi = \varphi(x, y)$. Das ist nicht tragisch. Man wählt für ψ eine beliebige von φ linear unabhängige Funktion. Dabei ergibt sich, daß $\tilde{a}_{12}$ auch 0 wird. Warum das so ist, werden wir in der Übung sehen. Am Ende folgt die *kanonische Form der parabolischen Gleichung*

$$v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta).$$

c) Elliptische Gleichungen

In diesem Fall kann $\tilde{a}_{11} = 0$ nicht erreicht werden. Man kann aber das Element $\tilde{a}_{12}$ zu Null machen. Das dikutieren wir hier nicht.