# Kapitel 8

# Die mehrdimensionale Wellengleichung

## 8.1 Kirchhoffsche und Poissonsche Formel

Wir betrachten hier das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \qquad && x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) &= h(x) && x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) &= g(x) && x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{8.1}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

<u>Definition:</u> *Sphärische Mittelwerte*

$$⨍_{S(x,r)} f(y)\, dS(y) := \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} f(y)\, dS(y).$$

Zu den Funktionen $u(x,t)$, $h(x)$ und $g(x)$ definieren wir die Mittelwerte

$$\begin{aligned} U(x;r,t) &:= ⨍_{S(x,r)} u(y,t)\, dS(y) \\ G(x;r) &:= ⨍_{S(x,r)} g(y)\, dS(y) \\ H(x;r) &:= ⨍_{S(x,r)} h(y)\, dS(y) \end{aligned}$$

Für festes $x$ betrachten wir $U$ als Funktion von $r$ und $t$ und leiten eine partielle Differentialgleichung her, der $U$ genügt.

**Satz 28** *Die Funktion $u = u(x,t)$ erfülle das Cauchy-Problem (8.1), und $x \in \mathbb{R}^n$ sei fest gewählt. Außerdem gelte $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Dann gilt auch $U \in C^m([0,\infty) \times [0,\infty))$ und $U$ erfüllt die* Euler-Poisson-Darbouxsche Gleichung

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r &= 0 \qquad && \text{in } \mathbb{R}_+,\ t>0 \\ U(x;r,0) &= H(x;r) && r>0 \\ U_t(x;r,0) &= G(x;r) && r>0 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Definition: Analog zum sphärischen Mittelwert definieren wir

$$\fint_{B(x,r)} f(y)\, dS(y) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dS(y).$$

Beweis: Für $r > 0$ ergibt sich

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy, \tag{8.3}$$

und zwar völlig identisch zum Beweis von Satz 7: Wir erhielten dort (in unseren neuen Bezeichnungen)

$$\varphi'(r) = U_r = \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy,$$

wegen $|S(x,r)| = \dfrac{n}{r}|B(x,r)|$. Für $r \downarrow 0$ folgt daraus $\lim\limits_{r\downarrow 0} = 0$, daraus die Stetigkeit auf $[0,\infty)$. Wir differenzieren weiter und erhalten

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \frac{d}{dr}\left( \frac{r}{n|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dy \right) \\ &= \frac{d}{dr}\left( \frac{r^{-n+1}}{n|B(0,1)|} \int_0^r \int_{S(x,\varrho)} \Delta u\, dS d\varrho \right) \\ &= \frac{-n+1}{n} \frac{r^{-n}}{|B(0,1)|} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dy + \frac{r}{n} \frac{1}{B(x,r)|} \int_{S(x,r)} \Delta u\, dS \\ &= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Delta u\, dy + \frac{1}{|S(x,r)|} \int_{S(x,r)} \Delta u\, dS \\ &= \fint_{S(x,r)} \Delta u\, dS + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \fint_{B(x,r)} \Delta u\, dy \end{aligned} \tag{8.4}$$

Damit folgt $\lim\limits_{r\downarrow 0} U_{rr} = \Delta U(x,t) + (\frac{1}{n} - 1)\Delta U(x,t) = \frac{1}{n}\Delta U(x,t)$. In gleicher Weise kann weiter differenziert werden, um $U \in C^m$ zu erhalten.

Herleitung der Differentialgleichung: Aus (8.3) und der Wellengleichung folgt

$$U_r = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} u_{tt}\, dy$$

und wegen $|B(x,r)| = r^n |B(0,1)| = \frac{r^n}{n}|S(0,1)|$ gilt

$$U_r = \frac{1}{|S(0,1)| r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}\, dy.$$

Damit erhalten wir

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{B(x,r)} u_{tt}\, dy = \frac{1}{|S(0,1)|} \int_0^r \int_{S(x,\varrho)} u_{tt}\, dS d\varrho.$$

Wir leiten beide Seiten nach $r$ ab

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} U_r\right) = \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{S(x,r)} u_{tt}\, dS = r^{n-1} \fint_{S(x,r)} u_{tt}\, dS = r^{n-1} U_{tt}.$$

Ausdifferenzieren und Umstellen ergibt die gesuchte Gleichung. Die Anfangsbedingungen und die Stetigkeit ergeben sich ganz einfach aus der Definition und der Stetigkeit, zum Beispiel

$$U_t(x; r, 0) = \lim_{t\downarrow 0} \fint_{S(x,r)} u_t(y,t)\, dS = \fint_{S(x,r)} h(y)\, dS = H(x,r).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir gehen nun wie folgt vor: Wir leiten zunächst eine Lösungsformel für $n = 3$ her (Kirchhoffsche Formel) und dann daraus eine für $n = 2$ (Poissonsche Formel).

<u>Lösung von (8.1) für $n = 3$:</u> ($x$ wieder fest)

Voraussetzung: $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$.
Definition: $\tilde{U} := rU$, $\tilde{G} = rG$, $\tilde{H} = rH$.

Berechnen wir $\tilde{U}_{tt}$, so folgt aus Satz 28 mit $n = 3$

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = \tilde{U}_{rr}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{tt} &= \tilde{U}_{rr} \\
\tilde{U}(r,0) &= \tilde{H} \\
\tilde{U}_t(r,0) &= \tilde{G} \\
\tilde{U}(0,t) &= 0
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Fakt, dass $U$ für $r \downarrow 0$ beschränkt bleibt, daher $\tilde{U} = rU \to 0$ für $r \downarrow 0$. Also löst $\tilde{U}$ die eindimensionale Wellengleichung auf der Halbgeraden. Dafür haben wir die d'Alembertsche Formel. Aus der folgt

$$\tilde{U}(r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(y)\, dy. \tag{8.5}$$

Wegen

$$u(x,t) = \lim_{r\downarrow 0} U(x;r,t) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r}$$

ergibt sich aus (8.5)

$$u(x,t) = \lim_{r\downarrow 0}\left(\frac{1}{2r}(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tilde{H}(y)\, dy\right) = \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t).$$

Nach Definition gilt $\tilde{G} = tG(t)$, analog $\tilde{H}$, also

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t G(t)} + tH(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(t \fint_{S(x,t)} g(y)\, dS) + t \fint_{S(x,t)} h(y)\, dS \qquad (8.6) \\
&= \fint_{S(x,t)} g(y)\, dS + t\frac{\partial}{\partial t}(\fint_{S(0,1)} g(x+tz)\, dS(z)) + \fint_{S(x,t)} th(y)\, dS
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

$$u(x,t) = \fint_{S(x,t)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y))\, dS(y) \tag{8.7}$$

Bemerkung: Die Lösung $u$ im Punkt $x$ hängt damit nur von den Daten auf der Kugeloberfläche vom Radius $t$ um $x$ ab. Dies ist wichtig und entspricht auch der alltäglichen Erfahrung: Ein lautes Geräusch, dass von einem Punkt $\tilde{x}$ ausgeht, nimmt man im Punkt $x$ genau zu einem Zeitpunkt war. Damit ist es möglich, sich über das Gehör zu orientieren.

Der Fall $n = 2$

Die eben angewendete Methode funktioniert im Fall $n = 2$ nicht. Statt dessen geht man wie folgt vor: Man fasst die Funktion $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ als eine spezielle Funktion von drei Variablen $(x_1, x_2, x_3)$ auf,

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t).$$

Aus dem Cauchyproblem (8.1) folgt dann

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} - \Delta\bar{u} &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ \bar{u}(x, 0) &= \bar{g} \\ \bar{u}_t(x, 0) &= \bar{h} \end{aligned}$$

mit $\bar{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)$, $\bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$. Wir schreiben jetzt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und wenden das Kirchhoffsche Formel in der Form (8.6) an:

$$u(x, t) = \bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}(t \fint_{S(\bar{x},t)} \bar{g}(y)\, d\bar{S}) + t \fint_{S(\bar{x},t)} \bar{h}(y)\, d\bar{S}$$

Wir benutzen nun

$$\fint_{S(\bar{x},t)} \bar{g}(y)\, d\bar{S} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(\bar{x},t)} \bar{g}(y)\, d\bar{S} = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x,t)} g(y)\sqrt{1 + |\nabla f(y)|^2}\, dy$$

mit $f(y) = \sqrt{t^2 - |y - x|^2}$ (explizite Darstellung der oberen Kugeloberfläche; die 2 kommt durch die untere ins Spiel). Aus

$$\sqrt{1 + |\nabla f(y)|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}$$

folgt nun

$$\begin{aligned} \fint_{S(\bar{x},t)} \bar{g}(y)\, d\bar{S} &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}\, dy \\ &= \frac{t}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}\, dy \end{aligned}$$

Analog behandelt man das $h$-Integral. Insgesamt erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy\right) + \frac{t^2}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy.$$

Nun wird noch auf dem üblichen Weg die Differentiation ausgeführt: Transformation auf $B(0,1)$, Differentiation, Rücktransformation. Am Ende ergibt sich die *Poissonsche Formel* ($n = 2$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\nabla g(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy. \tag{8.8}$$

<u>Bemerkung:</u>

Hier hängt $u$ im Punkt $x$ von den Daten im Kreis um $x$ ab, nicht nur von denen auf dem Rand. Dies kann man auch in höheren Ortsdimensionen beobachten: Ist $n \geq 3$ ungerade, so hängt $u(x,t)$ nur von den Daten auf der Oberfläche $S(x,t)$ ab, während bei geradem $n$ die Dinge so wie im Fall $n = 2$ liegen. Richtig hören kann man also nur in ungeraden Dimensionen.

Formeln, Details für $n > 3$: Evans S.75-81.

## 8.2 Die inhomogene Wellengleichung

Hier behandeln wir das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Zur Lösung von (8.9) wird ein Superpositionsprinzip angewendet. Dazu betrachtet man die <u>homogene</u> Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times (s,\infty)$ mit

$$\begin{aligned} u(x,t;s) &= 0 \qquad\qquad \text{bei } t = s \\ u_t(x,0) &= f(x,t;s) \quad \text{bei } t = s. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Es lässt sich zeigen, dass

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\, ds \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \tag{8.11}$$

das Problem (8.9) löst. Im nächsten Satz bezeichnet $[x]$ die bekannte entier-Funktion (ganzer Teil).

**Satz 29** *Es sei $n \geq 2$ und $f \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ gegeben und $u$ durch die Formeln (8.10)–(8.11) definiert. Dann gilt*
*(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$*
*(ii) $u_{tt} - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$*
*(iii) Für alle $x^o \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lim_{x \to x^o, t \downarrow 0} u(x,t) = 0 \qquad \lim_{x \to x^o, t \downarrow 0} u_t(x,t) = 0$$

Beweis: (i) Die Regularitätsaussage wollen wir hier nicht nachweisen, sie kann bei Evans nachgelesen werden.
(ii) Zur Wellengleichung:

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\, ds$$

Differentiation nach $t$ ergibt wegen (8.10)

$$u_t(x,t) = u(x,t;t) + \int_0^t u_t(x,t;s)\, ds = \int_0^t u_t(x,t;s)\, ds.$$

Differenzieren wir das Ergebnis noch einmal, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= u_t(x,t;t) + \int_0^t u_{tt}(x,t;s)\, ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t u_{tt}(x,t;s)\, ds. \end{aligned}$$

Andererseits folgt nach Anwendung des Laplace-Operators (Integration und Differentiation dürfen wegen (i) vertauscht werden)

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \Delta\, ds = \int_0^t u_{tt}(x,t;s)\, ds,$$

weil $u(x,t;s)$ die homogene Wellengleichung löst. Aus den letzten beiden Gleichungen folgt sofort

$$u_{tt} - f = \Delta u$$

also die inhomogene Wellengleichung.
(iii) Aus den obigen Darstellungen von $u$ und $u_t$ ergeben sich die Grenzwerte für $x \to x^o$ und $t \downarrow 0$ sofort, da

$$\int_0^t \to 0 \text{ für } t \to 0$$

gilt. □

## 8.3 Eindeutigkeitsfragen

Unter natürlichen Voraussetzungen ist die Lösung der Wellengleichung eindeutig bestimmt. Zwei verschiedene Aussagen dazu werden hier mit Hilfe von Energiemethoden bewiesen.

**Satz 30** *(Eindeutigkeit) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\Gamma$, $Q := \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = \bar{Q} \setminus Q$.
Es existiert höchstens eine Funktion $u \in C^2(\bar{Q})$, welche die Aufgabe*

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \textit{in } Q \\ u &= g && \textit{auf } \Sigma \\ u &= h && \textit{in } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned} \tag{8.12}$$

*löst.*

Bemerkung: $\Sigma$ enthält alle Punkte mit $x \in \Gamma$ und alle mit $t = 0$. Die zweite Gleichung in (8.12) fasst daher Anfangs- und Randbedingung zusammen.

Beweis: Es sei $u_1$ und $u_2$ Lösungen von (8.12). Dann löst $u = u_1 - u_2$ das entsprechende homogene Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } Q \\ u &= 0 && \text{auf } \Sigma \\ u &= 0 && \text{in } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Wir müssen nur $u \equiv 0$ zeigen Dazu definieren wir ein *Energiefunktional*

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx, \qquad 0 \le t \le T.$$

Dann folgt

$$\dot{e}(t) = \int_\Omega u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t \, dx.$$

Zunächst gilt

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_t \, dx = \int_\Gamma u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_\Omega u_t \Delta u \, dx = -\int_\Omega u_t \Delta u \, dx.$$

Aus $u = 0$ auf $\Gamma$ für alle $t$ folgt nämlich $u_t = 0$ auf $\Gamma$. Damit ergibt sich

$$\dot{e}(t) = \int_\Omega u_t (u_{tt} - \Delta u) \, dx = 0 \qquad \forall t \in (0, T].$$

Somit gilt $e(t) \equiv e(0) = 0$, $0 \le t \le T$. Also erhalten wir

$$u_t \equiv 0, \qquad \nabla u \equiv 0 \qquad \text{in } Q.$$

Daher ist $u$ konstant und wegen $u(x, 0) = 0$ gilt $u \equiv 0$, was natürlich $u_1 = u_2$ impliziert. □

Zum Abschluss betrachten wir noch, welche Raum-Zeit-Punkte durch gewisse Anfangsereignisse überhaupt beeinflusst werden können. Wir werden dabei im Gegensatz zur Wärmeleitgleichung eine *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen* feststellen.

Definition: (Einflusskegel)

$$K(x_0, t_0) = \{(x, t) |\, 0 \le t \le t_0, \, |x - x_0| \le t_0 - t\}$$

**Satz 31** *(Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit) Gilt $u = u_t = 0$ auf der Grundfläche $B(x_0, t_0) = K(x_0, t_0) \cap \{(x, t) |\, t = t_0 - t_0 = 0\}$ des Kegels $K(x_0, t_0)$, so gilt auch $u \equiv 0$ in $K(x_0, t_0)$. $u$ ist dabei die Lösung der homogenen Wellengleichung.*

Beweis: Als Energie definieren wir jetzt

$$e(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B(x_0, t_0 - t)} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 \, dx,$$

$0 \leq t \leq t_0$. Durch Differentiation nach $t$ und unserem üblichen Trick ergibt sich

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{S(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \, dS \\
&= \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} u_t(u_{tt} - \Delta u) + \int\limits_{S(x_0,t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \, dS \\
&\quad -\frac{1}{2} \int\limits_{S(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \, dS \\
&= \int\limits_{S(x_0,t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \, dS - \frac{1}{2} \int\limits_{S(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \, dS
\end{aligned}$$

Aus der Youngschen Ungleichung folgt

$$|\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t| \leq |\nabla u \cdot \nu||u_t| \leq |\nabla u||u_t| \leq \frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2).$$

Daher gilt

$$\dot{e}(t) \leq 0 \qquad \text{also } e(t) \leq e(0) = 0$$

wegen $u_t = \nabla u = 0$ auf $B(x_0, t_0)$. Da die Energie aber immer nichtnegativ ist, kann nur $e(t) \equiv 0$ gelten, woraus $u \equiv 0$ in $K$. folgt. □

Folgerung:
(i) Die Lösung der Wellengleichung hängt nicht von Störungen außerhalb des Einflusskegels $K$ ab.
(ii) Damit haben Störungen endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.