TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2003
Institut für Mathematik
Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Schwache Lösungen

Partielle Differentialgleichungen - 10. Übung

1. (Vorrechenaufgabe) Leiten Sie die schwache Formulierung zu folgendem Randwertproblem her:

$$\begin{aligned}
(\Delta u)(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x) &= g_2(x) \quad \text{auf} \quad \Gamma_2, \\
\frac{\partial u}{\partial n}(x) + \alpha(x)u(x) &= g_3(x) \quad \text{auf} \quad \Gamma_3 \qquad (\partial\Omega = \Gamma_2 \cup \Gamma_3).
\end{aligned}$$

2. Gegeben sei ein glattes Gebiet Ω, welches durch eine glatte Kurve Γ_i in eine linke und rechte Hälfte geteilt wird. Die Lösung u soll die schwache Formulierung der folgenden Differntialgleichung erfüllen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\,[a(x)\operatorname{grad}\,u] &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\
u(x) &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Dabei soll $a(x)$ im jeweiligen Teilgebiet **positiv** und konstant sein:

$$a(x) = \begin{cases} a_1 & \text{in} \quad \Omega_1 \\ a_2 & \text{in} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

Welchen Beziehungen muß die schwache Lösung u dieser Aufgabe auf der Kurve Γ_i genügen? Setzen Sie dazu voraus, daß $u \in H^2(\Omega_j)$ $(j = 1, 2)$ gilt.

3. Leiten Sie die schwache Formulierung zu folgenden Randwertproblemen her und zeigen Sie, daß die Voraussetzungen des Satzes von Lax/Milgram erfüllt sind:
a)

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\
u(x) &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + bu(x) &= f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \\
\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \nu_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Dabei seien $a_{ij} = a_{ji}$ und b positive Konstanten, $f \in L^2(\Omega)$ und $\nu_j(x)$ die j-te Komponente des äußeren normierten Normalenvektors in x, und die Differentialgleichung sei **elliptisch**.