TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2003

Institut für Mathematik

Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

Schwache Ableitungen

Partielle Differentialgleichungen - 9. Übung

1. Es sei $f(x) = e^{1/x}$. Zeigen Sie, daß von f eine Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ erzeugt wird, daß es jedoch keine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $\mathbb{R}$ gibt, die eine Distribution $T_{\tilde{f}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ erzeugt. Betrachten Sie dazu eine Folge von Testfunktionen f_n, auf die die Distribution angewandt werden soll, mit
$f_n(x) = e^{-n/2} n f_0(nx),\ f_0 \in \mathcal{D},\ f_0 \geq 0,\ f_0 \not\equiv 0,\ \operatorname{supp} f_0 \subset [1,2].$

2. (Vorrechenaufgabe) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $n-1$– dimensionale Mannigfaltigkeit, $f \in L^1(M)$. Zeigen Sie, daß durch

$$T_f^M(\phi) = \int_M f(x)\phi(x)\,ds \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$$

eine Distribution definiert wird.

3. Wir betrachten den Raum $H_o^1(-a,a)$, ($a > 0$ fest) und das verkürzte Skalarprodukt. Nach den Einbettungssätzen wissen wir, dass diese Funktionen (wegen $n = 1$) stetig sind. Daher stellt die δ-Distribution ein stetiges Funktional dar. Natürlich liegt δ nicht im Raum H_o^1. Nach dem Satz von Riesz muss es aber ein Element g aus H_o^1 geben, so dass

$$f(0) = (g, f)_{H_o^1(-a,a)} \qquad \forall f \in H_o^1(-a,a)$$

gilt. Man bestimme dieses Element.

4. (Vorrechenaufgabe) Für welche ganzzahligen s gehören die folgenden Funktionen zu $H^s(-1,1)$?

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$