T U ¨ B
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Stefan Felsner
Andreas Paffenholz

Diskrete MAFI
Sommersemester 2005

Wiebke Höhn
Raman Sanyal
Xiumei Wang

D M ¨ I
P ¨

Bearbeitung am 25./26. Mai 2005 in den Tutorien

A 1.

φ bezeichne die Eulersche Funktion.

(1) Berechnen Sie $\varphi(n)$ für $n = 35, 225, 256$.
(2) Bestimmen Sie die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = \varphi(2n)\}$

A 2.

Ist folgendes System von Kongruenzen lösbar? Wenn ja, bestimmen Sie alle Lösungen.

$$\begin{aligned} z &\equiv 1 \mod 2 \qquad & z &\equiv 3 \mod 5 \\ z &\equiv 2 \mod 3 \qquad & z &\equiv 3 \mod 7 \end{aligned}$$

A 3.

(1) Für $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Z}$ sei $\text{rest}(x, m)$ der Rest von x bei Division durch m (also z.B. $\text{rest}(15, 4) = 3$). Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(\text{rest}(x, m), m) = 1$ die Formel

$$x^y \equiv \text{rest}(x, m)^{\text{rest}(y, \varphi(m))} \mod m$$

(2) Berechnen Sie die Zahlen $\text{rest}(1988^{19984}, 19)$ und $\text{rest}(2004^{2005}, 25)$.

Z 1.

Sei $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$. Zeigen Sie:

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{s_i} - 1}{p_i - 1},$$

wobei $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ die Primfaktorzerlegung von n ist. Die Funktion σ heißt *Teilerfunktion*.