Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Stefan Felsner
Andreas Paffenholz

Diskrete MAFI
Sommersemester 2005
Wiebke Höhn
Raman Sanyal
Xiumei Wang

Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker
3. Übungsblatt

Abgabe am 23. Mai 2005 **vor** der Vorlesung

Zum Erreichen der vollen Punktzahl muss bei jeder Aufgabe der Lösungsweg vollständig angegeben werden.

Aufgabe 1. — 2 Punkte

Sei G ein beliebiger Graph. Für einen Kreis k in G bezeichnen wir mit $l(k)$ die Länge des Kreises k (also die Anzahl seiner Kanten). Die kleinste auftretende Länge eines Kreises in G heißt *Taillenweite* (girth) von G:

$$g(G) := \min\{\, l(k) \mid k \text{ Kreis in } G \,\}.$$

Zeigen Sie, dass für einen planaren Graphen G mit f Gebieten und e Kanten gilt:

$$f \cdot g(G) \leq 2 \cdot e.$$

Aufgabe 2. — 3 Punkte

Zeigen Sie, dass es in einem ebenen Graphen $G = (V, E)$ mit $|E| < 3|V| - 6$ immer zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ mit den folgenden beiden Eigenschaft gibt:

(1) v_1 und v_2 sind nicht durch eine Kante verbunden, also $\{v_1, v_2\} \notin E$, und
(2) $G' := (V, E \cup \{v_1, v_2\})$ ist planar.

Aufgabe 3. — 2+3 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *Färbung* von G ist eine Abbildung $F : V \to S$ von V in eine Menge S von Farben, so dass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben bekommen, also $F(v) \neq F(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$ gilt. G heißt *k-färbbar*, wenn er eine Färbung $F : V \to S$ mit $|S| = k$ besitzt.

(1) Zeigen Sie, dass ebene Graphen immer einen Knoten vom Grad höchstens fünf besitzen.
(2) Zeigen Sie, dass ebene Graphen immer 6-färbbar sind.

Aufgabe 4. — 3+2+1 Punkte

Wir betrachten die beiden Zahlen $a = 7644$ und $b = 8778$.

(1) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(a, b)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.
(2) Bestimmen Sie zwei Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$ für die $\mathrm{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$ gilt.
(3) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen von a und b.

Aufgabe 5. — 4 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zwei natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{a \cdot b}{ggT(a, b)} = \min(\{d \in \mathbb{N} : a|d \text{ und } b|d\}) .$$

(Diese Zahl heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b und wird in der Regel mit $\mathrm{kgV}(a, b)$ abgekürzt).