Reinhard Nabben,
Sommersemester 2005

Einführung in die Numerische Mathematik

4. Übung

Aufgabe 1: $f \in C^{2n+2}[a,b]$ werde durch ein Polynom $P \in \Pi_{2n+1}$, gegeben durch die Bedingungen

$$P(x_i) = f(x_i) \qquad P'(x_i) = f'(x_i),$$

für $i \in \{0.\dots,n\}, x_i \in [a,b]$ paarweise verschieden, interpoliert. Zeige: Für den Fehler in einem Punkt $x \in [a,b]$ gilt: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(\omega_{n+1}(x))^2,$$

mit

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Die Tschebyscheff–Polynome $T_n(x)$ sind rekursiv definiert durch

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_k(x) = 2x\ T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x),\ k = 2, 3, \dots.$$

Zeige:

a) $T_n(\cos\ x) = \cos\ nx$ und daher für $|x| \leq 1$
$T_n(x) = \cos\ (n\ \arccos\ x)$

b) T_n hat n reelle Nullstellen in $[-1,1]: x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k=1,\dots,n$ und $n+1$ lokale Extremwerte t_k in $[-1,1]$, nämlich

$$t_k = \cos\frac{k\pi}{n}\quad k = 0, 1, \dots, n.$$

c) Für alle Polynome $p(x) = x^n + \ldots \in \Pi_n$ gilt

$$\max_{|x|\le 1} |p(x)| \ge \max_{|x|\le 1} \left|\frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

[Hinweis: Nehme das Gegenteil für $p(x)$ an und betrachte das Vorzeichen von $r_{n-1}(x) = p(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x)$ in den Punkten $t_k,\ k = 0, \dots, n$.]

(8 Punkte)

Aufgabe P3: Bestimme mit dem Newtonschema das Interpolationspolynom p zu $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$. Als Stützstellen verwende jeweils

i) $t_i = -1 + ih,\ i = 0, \dots, n;\quad h = \dfrac{2}{n}$,

ii) $t_i = \cos\dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)},\ i = 0, \dots, n$,

für $n = 2, 4, 6, \dots, 20$. Werte das Polynom an den Stellen $y_j^i = t_i + j\frac{t_{i+1}-t_i}{21},\ j = 1, \dots, 20$ aus. Vergleiche als Schätzung für den maximalen Fehler $\|p - f\|_{\infty\,[-1,1]}$

$$\max_{i\in\{0,\dots,n-1\},\, j\in\{1,\dots,20\}} |p(y_j^i) - f(y_j^i)|.$$

Zeichne die Interpolationspolynome zu den Stützstellen in i), ii) für $n = 20$. Erläutere die Ergebnisse.