Reinhard Nabben,
Sommersemester 2005

Einführung in die Numerische Mathematik

6. Übung

Aufgabe 1: Zu der äquidistanten Knotenverteilung

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 \ldots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3}$$

mit $h := x_1 - x_0$ definiere für $i \in \{-1, \ldots, n+1\}$

$$B_i(x) := \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{für } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{für } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass auf $[x_0, x_n]$ die Funktionen $B_i(x), i \in \{-1, \ldots, n+1\}$ kubische Spline-Funktionen bzgl. der Knotenverteilung $x_0 < x_1 \ldots < x_n$ sind, und bestimme

$B_i^{(j)}(x_k)$ für $i \in \{-1, \ldots, n+1\}, k \in \{i-2, \ldots, i+2\}, j \in \{0, 1, 2\}$.

b) Zeige, dass es genau eine Funktion $s \in span\{B_{-1}, \ldots, B_{n+1}\}$ gibt, so dass s für vorgegebene Werte $f_0, \ldots, f_n, f_0', f_n'$ den Interpolationsbegingungen $s(x_i) = f_i$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$, und $s'(x_o) = f_0', s'(x_n) = f_n'$ genügt. Hinweis: Stelle ein Gleichungssystem für die Koeffizienten c_i in $s(x) =$

$\sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(x)$ auf. Zeige, dass die Matrix nach geeigneter Transformation mit einer Diagonalmatrix diagonal dominant wird.

(8 Punkte)

Aufgabe 2P: Interpoliere mit natürlicher kubischer Splineinterpolation die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ an den Stützstellen aus Aufgabe 3, Übung 4 und vergleiche an den dort gegebenen Werten y_i mit den Ergebnissen für die Polynominterpolation.

Aufgabe 3: Eine andere Art, den kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu berechnen, beruht auf der Verwendung der Werte $\sigma_i = s''(x_i),\ i = 0, \dots, n$. Dazu zeige:

- a) Ist $p_\nu = s|_{I_\nu} = a_\nu(x - x_{\nu-1})^3 + b_\nu(x - x_{\nu-1})^2 + c_\nu(x - x_{\nu-1}) + d_\nu$ so ist

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{6h_\nu}\,(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}), b_\nu = \frac{1}{2}\,\sigma_{\nu-1}, \\ c_\nu &= \frac{1}{h_\nu}\,(f_\nu - f_{\nu-1}) - \frac{1}{6}\,h_\nu(\sigma_\nu + 2\sigma_{\nu-1}),\ d_\nu = f_{\nu-1}. \end{aligned}$$

- b) Stelle aus den Gleichungen $p'_\nu(x_\nu) = p'_{\nu+1}(x_\nu)\ \nu = 1, \dots, n-1$ und $\sigma_0 = \sigma_n = 0$ ein lineares Gleichungssystem für $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ auf.

- c) Zeige, dass dieses LGS symmetrisch und diagonal dominant ist.

- d) Für den Fall, daß anstelle von $\sigma_0 = \sigma_n = 0$ die Ableitungen $s'(x_0) = \gamma_0,\ s'(x_n) = \gamma_1$ vorgegeben sind, stelle ein analoges Gleichungssystem für $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ auf.

(8 Punkte)