

# Einführung in die Numerische Mathematik

## 8. Übung

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$$

- a) exakt.
- b) mittels Extrapolation per Hand. Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung vorgestellte Romberg-Folge mit der Tiefe  $m = 3$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe 2P:** Integrieren Sie die Funktion

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$$

mittels Extrapolation. Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung vorgestellte Bulirsch-Folge jeweils für die Tiefen  $m = 0, \dots, 5$ . Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung.

**Aufgabe 3:** Sei  $f \in C^2([a, b])$

- a) Sei  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  und seien  $x, h \in \mathbb{R}$  mit  $[x-h, x+h] \subset [a, b]$ .  
Zeigen Sie

$$F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) = hf(x) + \frac{h^3}{48} (f''(\xi_+) + f''(\xi_-))$$

mit  $\xi_+, \xi_- \in [a, b]$ .

- b) Zeigen Sie: Sei  $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_l \in [a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$f''(\xi) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f''(\xi_i).$$

- c) Sei  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$  für ein  $N \geq 1$ . Zeigen Sie

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\xi_i)$$

mit  $\xi_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ .

- d) Sei  $M(h) = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ . Zeigen Sie

$$\int_a^b f(x) dx - M(h) = (b-a) \frac{h^2}{24} f''(\xi)$$

mit  $\xi \in [a, b]$ .

(8 Punkte)